

Оглавление

1	Электрическое поле.	11
1.1	Закон Кулона.	11
1.1.1	Принцип суперпозиции электростатических полей.	12
1.1.2	Электрический диполь.	13
1.1.3	Дипольный момент нейтральной системы зарядов.	14
1.2	Поток вектора E .	14
1.2.1	Электростатическая теорема Гаусса.	14
1.2.2	Поле плоскости, пластинки, шара, сферы.	15
1.2.3	Применимость закона Кулона. Опыт Кавендиша.	16
1.2.4	Граничные условия для вектора напряжённости.	17
1.2.5	Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса.	18
1.3	Электрическое поле в веществе.	19
1.3.1	Влияние вещества на внешнее электрическое поле.	19
1.3.2	Проводники в электрическом поле.	19
1.3.3	Теорема Фарадея.	20
1.3.4	Поляризация диэлектриков.	21
1.3.5	Вектор поляризации.	23
1.3.6	Теорема Гаусса для диэлектриков.	24
1.3.7	Граничные условия электростатики в веществе.	24
1.3.8	Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость.	25
1.3.9	Преломление силовых линий.	25
1.3.10	Пример: поле равномерно поляризованного шара.	26
1.4	Циркуляция вектора E .	27
1.4.1	Теорема о циркуляции.	27
1.4.2	Электрический потенциал.	28
1.4.3	Точечный диполь.	29
1.4.4	Вычисление потенциала по напряжённости поля.	29
1.5	Общая задача математической электростатики.	30
1.5.1	Мотивировка и формулировка.	30
1.5.2	Метод электрических изображений.	31
1.6	Ёмкость проводников и конденсаторов.	33

1.6.1	Уединённый проводник.	33
1.6.2	Конденсатор.	34
1.6.3	Плоский конденсатор.	34
1.6.4	Ёмкость шарового и цилиндрического конденсаторов. . . .	34
1.6.5	Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.	35
1.7	Электрическая энергия.	36
1.7.1	Взаимная энергия проводников.	36
1.7.2	Полная энергия взаимодействия.	37
1.7.3	Энергия уединённого проводника.	37
1.7.4	Энергия конденсатора.	37
1.7.5	Энергия электрического поля.	38
2	Электрический ток.	39
2.1	Плотность тока. Закон сохранения электрического заряда.	39
2.2	Закон Ома.	40
2.2.1	Сопrotивление проводника.	40
2.2.2	Электрическое поле стационарного тока.	40
2.2.3	Электродвижущая сила.	40
2.2.4	Правила Кирхгофа.	41
2.3	Закон Джоуля–Ленца.	41
2.3.1	Закон сохранения энергии в цепях постоянного тока, содержащих ЭДС.	42
3	Магнитное поле.	45
3.1	Силы, действующие в магнитном поле.	45
3.1.1	Силы Лоренца и Ампера.	45
3.1.2	Магнитное поле равномерно движущегося заряда.	47
3.1.3	Закон Био и Савара.	48
3.1.4	Индукция магнитного поля прямого бесконечного проводящего с током.	49
3.1.5	Магнитный момент контура с током.	50
3.2	Теорема Гаусса для магнитных полей.	51
3.3	Циркуляция вектора $\mathbf{B}$	52
3.3.1	Теорема о циркуляции.	52
3.3.2	Магнитное поле соленоида.	53
3.3.3	Магнитное поле тороидальной катушки.	54
3.3.4	Дифференциальная форма теоремы о циркуляции.	55
3.4	Магнитное поле в веществе.	56
3.4.1	Молекулярные токи.	56
3.4.2	Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе.	57
3.4.3	Граничные условия для векторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$	58
3.4.4	Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость.	59
3.5	Электромагнитная индукция.	60

3.5.1	Работа при перемещении витка с током в постоянном магнитном поле.	60
3.5.2	Электромагнитная индукция.	60
3.5.3	Правило Ленца.	61
3.5.4	Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции.	63
3.5.5	Индуктивность проводов.	64
3.5.6	Явления при замыкании постоянного тока.	66
3.5.7	Явления при размыкании постоянного тока.	67
3.5.8	Взаимная индукция.	67
3.6	Магнитная энергия.	68
3.6.1	Энергия тока.	68
3.6.2	Энергия магнитного поля.	68
3.6.3	Собственная и взаимная энергия.	69
3.7	Теорема о сохранении магнитного потока.	70
3.8	Ферромагнетизм.	71
4	Уравнения Максвелла.	73
4.1	Ток смещения.	73
4.2	Система уравнений Максвелла.	75
4.2.1	Материальные уравнения.	76
4.3	Скорость распространения электромагнитных возмущений.	77
4.3.1	Возникновение электромагнитного поля.	77
4.3.2	Распространение электромагнитного поля. Плоская волна.	78
4.3.3	Следствия.	79
4.4	Энергия и поток энергии.	80
4.5	Векторный потенциал.	82
4.5.1	Определение и «обоснование».	82
4.5.2	Кулоновская калибровка.	83
4.5.3	Калибровка Лоренца.	83
5	Колебания и волны.	85
5.1	Уравнение колебательного контура.	85
5.1.1	Свободные колебания гармонического осциллятора.	86
5.1.2	Условие квазистационарности.	87
5.1.3	Затухающие колебания.	88
5.2	Вынужденные колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы.	89
5.2.1	Общее решение.	89
5.2.2	Формулы амплитуды и фазы.	90
5.2.3	Резонансная кривая. Радио как пример резонанса токов и напряжения.	90
5.3	Вынужденные колебания под действием гармонической силы.	91
5.4	Метод комплексных амплитуд.	92

5.4.1	Пример 1.	93
5.4.2	Пример 2.	93
5.4.3	RC-цепь.	95
5.4.4	RL-цепь.	95
5.5	Эффективные напряжение и ток.	96
5.6	Плоские электромагнитные волны.	97
5.7	Поле излучения диполя Герца.	99
5.8	Скин-эффект.	100

Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. Учебное пособие. – 1977.
- [2] Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма // М.: Высшая школа. – 1983. – Т. 1. – №. 1.3. – С. 1.4.
- [3] TeorminByVasya.pdf, TeorminByYura.pdf, <https://disk.yandex.ru/d/wZONhZeySMqw>
- [4] Электричество и магнетизм. Консультация к устному экзамену (плейлист с канала «Кафедра общей физики МФТИ»), <https://youtube.com/playlist?list=PLtkGmqQ5HKX755wfu3ujnnicUyzwtPwPZ>
- [5] Квазистационарные процессы, RC- и RL-цепи, <https://multiring.ru/course/physicspart2/content/chapter2/section/paragraph1/theory.html>
- [6] Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева. Под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд «Мир» Москва 1965. - 703 с. (только стр. 200-201).
- [7] Закон сохранения энергии в цепи, содержащей ЭДС. https://www.webmath.ru/poleznoe/fizika_162_zakon_sohranenija_jenergii_dlja_cepej_postojannogo_toka_soderzhashhih_jeds.php
- [8] Векторный потенциал электромагнитного поля // Википедия. [2022]. Дата обновления: 22.04.2022. URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=2537206&oldid=121586765> (дата обращения: 22.04.2022).
- [9] Волновой вектор // Википедия. [2018]. Дата обновления: 10.12.2018. URL: <https://ru.wikipedia.org/?curid=160451&oldid=96776681> (дата обращения: 10.12.2018).

Аннотация.

Настоящий pdf-файл является конспектом учебника Сивухина [1], составленным на основе списка контрольных вопросов к курсу электродинамики, который читался весной 2022 года на ВМК. Я выбрал Сивухина, потому что по этому учебнику ведутся лекции в МФТИ на кафедре общей физики. В нём много пояснений, читать интересно.

Я считаю, что нет лучшего способа понять предмет и подготовиться к экзамену, чем собственноручно написать большой конспект. Читать чужие теоремы и конспекты обычно бессмысленно. Однако этот получился столь неплохим, что я смело могу советовать его в качестве материала для подготовки как к экзамену, так и к семинарам.

Мелким серым текстом я выделил дополнительный материал, который не нужен, если вы хотите использовать файл только как теоремин. В этом случае введение тоже читать не нужно. Однако для более тщательного и увлекательного погружения советую всё же не пропускать введение и серые вставки.

В конспекте я нумеровал те математические формулы, которые нужны в качестве теоремы. Почти все они записаны в гауссовской системе единиц (а не в СИ, как это сделано в лекциях Макарова). В этом нет никакой проблемы, потому что 1) между этими системами нет какой-то супер сложной разницы, 2) преподавателям на экзамене без разницы. Чтобы разобраться в этой теме, советую прочитать §85 в Сивухине. В крайнем случае, в конце учебника есть приложение со всеми формулами курса, записанными в СИ.

Введение.

Действие на расстоянии и полевое взаимодействие.

Между *электрически заряженными* и *намагниченными* телами, а также телами, по которым *текут электрические токи*, — между ними действуют силы, которые называют *электродинамическими* или *электромагнитными*.

Раньше учёные думали, что они передаются *при непосредственном действии тел на расстоянии*, что за ними стоят *элементарные законы материи*, определяющие взаимодействие между *точечными электрическими зарядами, магнитными полюсами и элементами тока*. По форме и содержанию они копировали закон тяготения Ньютона, как, например, *законы Кулона*. Эта теория, развитая множеством учёных отличается математической строгостью, стройностью, конкретностью и основана на эмпирических фактах и их обобщениях. Количественные выводы в некоторых пределах были обоснованы.

Фарадей не был в восторге от такой картины. Он считал, что взаимодействие переносится через среду, которую сперва называл *эфиром*, заполняющим всё пространство, а затем — *электромагнитным полем*. Фарадей не фанат математических доказательств, многие его труды отвергались современниками из-за преобладающего качественного описания, а не количественного. Но его противником был Максвелл, который дал идеям Фарадея более строгую форму, сформулировав знаменитую систему уравнений.

Теория Максвелла в случае *постоянных* и *почти постоянных* полей не противоречит теории взаимодействия на расстоянии. Но в 1887-1888 годах опыты Герца показали существование электромагнитных волн, которые входили в теорию Максвелла, но не были объяснимы теорией взаимодействия на расстоянии.

Механическая интерпретация и вакуум.

Рассматривая «упругие деформации эфира», Максвелл пытался интерпретировать электричество механически. Но в последствии в «Трактате по электричеству и магнетизму» он построил теорию, полностью лишённой этого. Как мы знаем, в конечном итоге произошло даже обратное: механика была сведена

к электричеству. Современная физика утверждает, что поле *реально существует*, и является одним из видов материи. Оно обладает энергией, импульсом и другими физическими свойствами.

Изначально Максвелл рассматривал вакуум (эфир), как *одну из сред*, которая отличается от других только количественно: диэлектрической проницаемостью и электропроводностью. Более глубокую картину дал Лоренц в *электронной теории*, в которой нам важны два факта: вещество состоит из положительно заряженных атомных ядер и отрицательно заряженных электронов; вакуум является *универсальной средой*, в которой возбуждается электромагнитное поле. В связи с этим, любое вещество следует рассматривать как *вакуум, испорченный вкраплениями атомов*, поэтому изучение поля в веществе сводится к изучению поля в вакууме, чем мы и займёмся в первую очередь.

Мы начнём с простейших опытных фактов и явлений, которые можно объяснить и теорией непосредственного действия на расстоянии. Постепенными обобщениями мы получим результаты, которые не уложатся в мозг и мы будем вынуждены интерпретировать их с помощью теории поля. И, наконец, придём к уравнениям Максвелла.

Электрический заряд и напряжённость электрического поля.

Точечный заряд.

Количественное определение заряда и напряжённости поля сводится к указанию *способа их измерения*. *Пробным телом* будем называть настолько малое заряженное тело, что оно не индуцирует перераспределение заряда на окружающих телах и что его линейные размеры малы в сравнении с рассматриваемыми расстояниями.

Эмпирически установлено, что силы F_1, F_2 , действующие на два пробных тела в одной и той же точке статического поля, А) либо со-, либо противоположны; Б) их отношение по величине не зависит от выбранной точки пространства. Это позволяет характеризовать степень электризации пробного тела некоторым числом, которое называют *электрическим зарядом*:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1)$$

Приняв заряд некоторого пробного тела за *единицу*, можно определить заряд произвольного тела в абсолютной мере.

Свойства заряда.

Заряд тела не зависит от выбора ИСО, в которой он измеряется. Это верно по той же причине, по которой инвариантна масса покоя тела. Поскольку

заряд по определению измеряется через отношение, то верна инвариантность отношения зарядов. Так что если условиться считать некий заряд одинаковым во всех ИСО, то и все остальные заряды будут инвариантны.

Заряд системы определяется как сумма зарядов в ней, т.е. заряд *аддитивен*. Последующее развитие квантовой теории показало, что электрический заряд является *дискретной* величиной.

Фундаментальным свойством электричества является *закон сохранения заряда*: *полный заряд системы не изменен, если через её границу не проходят другие заряды*. Причем это не значит, что отдельно сохраняется положительный и отрицательный заряд системы: фотон высокой энергии может породить пару электрон-позитрон, или наоборот, пара может аннигилировать и породить фотон. Но в нашем курсе не рассматриваются частицы высокой энергии.

Эмпирически выявлено, что если *переменное поле* оказывается одинаковым в моменты измерения зарядов q_1, q_2 , то соотношение (1) остаётся верным.

Глава 1

Электрическое поле.

1.1 Закон Кулона.

Напряжённостью электрического поля называют силу, действующую на неподвижный пробный единичный заряд. Из соотношения (1) следует формула:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.1)$$

Требование неподвижности единичного заряда в определении напряжённости существенно. Опытами установлено, что *магнитное поле* действует на подвижные заряды и не действует на неподвижные. Причём если измерить силу $\mathbf{F}$, действующую на заряд, в двух системах (в подвижной и в неподвижной), то она будет одинаковой (при нерелятивистском приближении). Однако в первом случае эта сила будет чисто электрической, а во втором ещё и магнитной.

Основной количественный закон электростатики открыт Кулоном в 1785 году: *сила взаимодействия F двух неподвижных точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам q_1, q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r . Она является силой притяжения, если заряды разноимённые, и силой отталкивания, – если одноимённые.* То есть

$$F = C \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Или в векторной форме:

$$\mathbf{F}_{ik} = \frac{q_i q_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{F}_{ik}$ действует на q_k со стороны q_i .

Кулон открыл свой закон с помощью *крутильных весов*. Примерно за 11 лет до Кулона тот же закон из косвенных измерений открыл Г. Кавендиш.

Его работа не была опубликована и её обнаружил Максвелл, работая в Кавендишской лаборатории, и опубликовал в 1879 году.

Числовую константу C можно сделать какой-угодно. Наиболее удобно использовать безразмерную величину $C = 1$. Так принято в *гауссовской системе единиц*. Размерность заряда и напряжённости в этом случае определяются так:

$$[q] = [F^{\frac{1}{2}} r] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$$

$$[E] = [F q^{-1}] = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

За единицу заряда принимается такой, который действует на единичный заряд в вакууме на расстоянии 1 см силой в 1 дин. За единицу напряжённости поля принимается такая, которая действует на единичный заряд силой в 1 дин. Эти единицы называют *электростатическими*, или СГСЭ-единицами заряда и напряжённости.

Кулон равен 2.988×10^9 от СГСЭ-единицы заряда, а также десятой доле СГСМ-единице заряда.

1.1.1 Принцип суперпозиции электростатических полей.

Обобщением опытных фактов является *принцип суперпозиции*: *напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ нескольких неподвижных точечных зарядов q_i равна векторной сумме напряжённостей полей, которые бы создавал каждый из этих зарядов в отсутствие остальных*. В том числе, при непрерывном распределении сумма переходит в интеграл. То есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) &= \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_0) \\ &= \sum_i \frac{q_i}{(r_0 - r_i)^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) dV}{(r_0 - r)^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \quad (1.4)$$

Принцип суперпозиции нарушается на расстояниях порядка 10^{-13} см.

Силовой линией называют математическую линию, в каждой точке которой касательная совпадает с вектором $\mathbf{E}$. Из определения следует, что силовые линии начинаются от положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных.

Для определения силовых линий берут стеклянный сосуд с плоским дном и наливают в него вязкую непроводящую жидкость, в которой равномерно распределяют мелкие продолговатые частицы. Ещё один способ – это метод Поля: рассыпать мелкие продолговатые частицы на стеклянной пластинке вокруг источника поля и постукивать пластинку.

1.1.2 Электрический диполь.

Диполем называют равные по величине и противоположные по знаку точечные заряды q , находящиеся на расстоянии l , проведённом от отрицательного заряда к положительному. Вектор $\mathbf{p} = ql$ называют *электрическим моментом диполя*.

1°. Напряжённость поля диполя в точках, взятых на оси диполя, равна

$$E = q \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) = q \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2 r_2^2} \approx \{r_1, r_2 \approx r\} \approx q \frac{2lr}{r^4} = \frac{2p}{r^3} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.5)$$

2°. Напряжённость поля диполя в точках, взятых на нормали к оси диполя, равна

$$E = 2E_z = 2 \frac{q}{r^2} \sin \vartheta = 2 \frac{q}{r^2} \frac{l/2}{r} = \frac{ql}{r^3} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.6)$$

3°. Напряжённость поля диполя в произвольной точке равна

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \quad (1.7)$$

Чтобы получить поле в точке C , поместим в точку C_1 сразу два заряда $-q, +q$ (рис. 1.1). Тогда точка C находится на оси диполя $\mathbf{p}_1$ и на нормали к $\mathbf{p}_2$, причём $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$. Тогда

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}_1}{r^3} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} = \frac{3\mathbf{p}_1}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} = \left\{ \mathbf{p}_1 = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right\} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

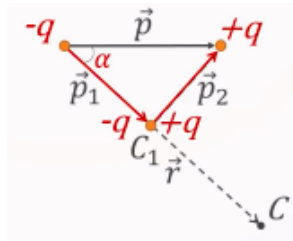


Рис. 1.1: К выводу формулы поля диполя.

4°. Сила, с которой внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$ действует на диполь $\mathbf{p}$ равна

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Докажем эту формулу:

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E} \left(\frac{l}{2}, 0, 0 \right) - \mathbf{E} \left(\frac{-l}{2}, 0, 0 \right) \right] = q d \mathbf{E},$$

$$d \mathbf{E} = \mathbf{l}_x \frac{\partial E}{\partial x} + \mathbf{l}_y \frac{\partial E}{\partial y} + \mathbf{l}_z \frac{\partial E}{\partial z} \Rightarrow q d \mathbf{E} = \mathbf{p} \nabla \mathbf{E}.$$

Наличие оператора дифференцирования означает, что сила (1.8) действует на диполь, если поле $\mathbf{E}$ неоднородно.

6°. Момент сил, действующих на диполь со стороны внешнего электрического поля:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{lF}] = q[\mathbf{lE}] = [\mathbf{pE}]. \quad (1.9)$$

Это означает, что внешнее поле стремится повернуть диполь в устойчивое положение антипараллельно своим силовым линиям.

1.1.3 Дипольный момент нейтральной системы зарядов.

Нейтральная система точечных зарядов, занимающая большой объём, в первом приближении ведёт себя как точечный диполь. Действительно, нейтральность системы означает, что в ней одинаковое количество положительного и отрицательного заряда, их можно распределить по диполям $\mathbf{p}_i$. Перенесём их в одну точку и сложим в один диполь с моментом $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$. Заметим, что этот момент инвариантен относительно выбора ИСО:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_i q_i^+ \mathbf{l}_i = \sum_i q_i^+ (\mathbf{r}_i^+ - \mathbf{r}_i^-) = \sum_i (q_i^+ \mathbf{r}_i^+ + q_i^- \mathbf{r}_i^-) = \\ &= \sum_k q_k \mathbf{r}_k = \{r_k = r'_k + \mathbf{a}\} = \sum_k q_k \mathbf{r}'_k + \mathbf{a} \underbrace{\sum_k q_k}_{=0} = \sum_k q_k \mathbf{r}'_k. \end{aligned}$$

1.2 Поток вектора $\mathbf{E}$.

1.2.1 Электростатическая теорема Гаусса.

Пусть q – сумма зарядов внутри замкнутой поверхности S . Поток вектора напряжённости $\mathbf{E}$ через S равен

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q. \quad (1.10)$$

► Пусть вектор $\mathbf{r}$ пробегает поверхность S . Тогда напряжённость в каждой точке будет равна $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$.

Пусть S – произвольная замкнутая поверхность, содержащая q . Тогда

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS_{\perp} = q \frac{dS_{\perp}}{r^2} = q d\Omega \Rightarrow \Phi = q\Omega.$$

Величина $d\Omega$ – это телесный угол, под которым из точки q виден элемент dS . Если заряд находится вне поверхности, то $\Omega = 0$, иначе $\Omega = 4\pi$. Если заряд находится на поверхности, то физический смысл отсутствует, так как точечный заряд подразумевает отдалённость от неё. $\square$

Электрическое поле подобно потоку жидкости. Возьмём контур L и через каждую его точку проведём силовую линию. Получившуюся трубку называют *силовой трубкой* (рис. 1.2).

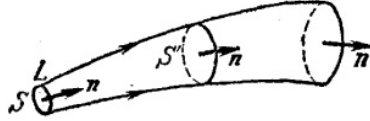


Рис. 1.2: Силовая трубка

Пусть S, S' – нормальные сечение силовой трубки. Применим теорему Гаусса к объёму, заключённому между ними. Полный поток $\Phi' - \Phi$ будет равен нулю. Если трубка бесконечно тонкая, то

$$ES = E'S'.$$

Получили полную аналогию с несжимаемой жидкостью: где трубке уже, поле $\mathbf{E}$ сильнее.

1.2.2 Поле плоскости, пластинки, шара, сферы.

Напряжённость поля бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ равен

$$\Phi = 2ES = 4\pi q \Rightarrow E = 2\pi\sigma.$$

Напряжённость поля бесконечной плоскопараллельной пластинки с объёмной плотностью заряда ρ равен

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x, & \text{внутри,} \\ 4\pi\rho a, & \text{снаружи.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Поле бесконечной прямой линии или цилиндра с линейной плотностью заряда κ равно

$$E = \frac{2\kappa}{r}. \quad (1.12)$$

Напряжённость поля шара (сферы) с зарядом q снаружи совпадает с полем точечного заряда q , помещённого в его (её) центр:

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

Поле внутри шара с объёмной плотностью заряда ρ равно

$$E = \frac{4\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi \rho}{3} r. \quad (1.13)$$

Поле внутри заряжённой сферы равно нулю:

$$E = 0.$$

1.2.3 Применимость закона Кулона. Опыт Кавендиша.

Последний факт можно рассмотреть в терминах закона Кулона. Рассмотрим сферу и произвольную точку A в ней (рис. 1.3)

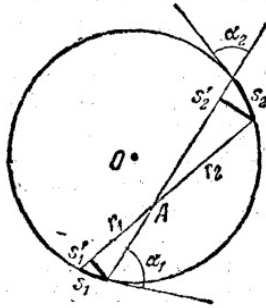


Рис. 21.

Рис. 1.3: Опыт Кавендиша.

Хорды из точки A выделяют элементы сферы s_1, s_2 . Тогда величины s'_1, s'_2 – их проекции – пропорциональны квадратам расстояний r_1, r_2 . Тогда получаем, что создаваемые зарядами q_1, q_2 поля равны по величине и противоположны по направлению:

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}.$$

Этот факт является следствием закона Кулона и как бы подтверждает его. Кавендиш установил верность закона $F \sim 1/r^n$ при $|n - 2| < 1/50$. Максвелл достиг точности $1/20000$. Сегодня (в год издания [1]) достигнута точность 10^{-9} . Дальше в курсе будет доказано, что поле внутри проводящей оболочки любой формы равно нулю, это тоже будет следствием закона Кулона (теорема Фарадея).

В настоящее время закон Кулона подтверждён для расстояний порядка десятка сантиметров. Однако если бы закон Кулона нарушался бы при больших расстояниях, то согласно современной квантовой электродинамике, фотон обладал бы отличной от нуля массой покоя, и как следствие, скорость э/м волн в вакууме зависела бы от длины волны. Отсутствие такой зависимости позволяет сделать вывод, что закон Кулона

верен до расстояний в несколько километров с относительной погрешностью $\sim 10^{-6}$.

1.2.4 Граничные условия для вектора напряжённости.

Рассмотрим поверхность S с переменной плотностью заряда σ (рис. 1.4).

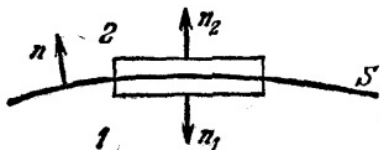


Рис. 1.4: Заряженная граница двух полупространств.

Возьмём бесконечно малый цилиндр, боковая поверхность которого несравнимо меньше оснований. По теореме Гаусса получаем, что сумма нормальных компонент напряжённости полей, создаваемых выделенным участком поверхности, равна

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\sigma.$$

Можно использовать не две нормали, а одну. Тогда получается, что $\mathbf{E}_n$ претерпевает скачок $4\pi\sigma$ при переходе через заряженную поверхность:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (1.14)$$

Это можно объяснить наличием полей внутри цилиндра и снаружи. При переходе через площадку внешнее поле не меняется. А внутреннее поле является полем равномерно заряженной бесконечной плоскости, поэтому

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\text{out}} + 2\pi\sigma\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{\text{out}} + 2\pi\sigma\mathbf{n}_2.$$

Заметим, что поскольку внутреннее поле не имеет тангенсальной составляющей, верно

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.15)$$

Заметим:

$$E_{\text{out}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2).$$

С помощью этой формулы можно посчитать силу, действующую на площадку со стороны внешнего поля:

$$\frac{df}{dS} = \sigma\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{\sigma}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \{\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n} = 4\pi\sigma\} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n})(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2).$$

В случае $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_n$

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{8\pi}(E_2^2 - E_1^2).$$

Пусть проводящая сфера радиуса R и с зарядом Q составлена из двух полусфер. Найдём силу F , с которой они отталкиваются друг от друга. Поле направлено радиально, а внутри сферы равно нулю, поэтому

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{8\pi} E_2^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{Q}{R^2} \right)^2.$$

Осталось посчитать поверхностный интеграл:

$$F = \iint_S df = \iint_S \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{R^4} dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \iint_S dS = \{S = 2\pi R^2\} = \frac{Q^2}{4R^2}.$$

1.2.5 Дифференциальная форма электростатической теоремы Гаусса.

Применим к теореме Гаусса формулу Гаусса–Остроградского из векторного анализа:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \Leftrightarrow \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (1.16)$$

Предыдущую форму теоремы Гаусса называют *интегральной*, а эту – *дифференциальной*. Они математически эквивалентны. Заметим, что дифференциальная форма применима только там, где плотность ρ конечна. Однако такие разрывы в распределении зарядов лишь математические абстракции, в физике они рассматриваются как предельные случаи непрерывного распределения. Так что *интегральная и дифференциальная формы теоремы Гаусса полностью эквивалентны*.

Теорема Гаусса, записанная в дифференциальной форме, не содержит никаких намёков на теорию непосредственного взаимодействия на расстоянии, она является *локальной*, в отличие от закона Кулона. Поскольку закон Кулона является достаточным, а не необходимым условием для теоремы Гаусса, имеет место гипотеза, что *теорема Гаусса верна не только в электростатике, но и в электродинамике*. Современные опыты не противоречат этому.

Пример. Вычислим с помощью диф. теоремы Гаусса поле внутри шара ρ :

$$\mathbf{E} = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \Leftrightarrow E_x = E(r) \frac{x}{r}, \quad E_y = E(r) \frac{y}{r}, \quad E_z = E(r) \frac{z}{r};$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r};$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr} \frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3} x^2 + \frac{E}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E)$$

$$\Rightarrow E = \frac{4\pi\rho}{3} r + \frac{C}{r^2}.$$

Поле в центре шара конечно, поэтому $C = 0$.

Полученная формула $\operatorname{div} \mathbf{E}$, к слову, выражает дивергенцию произвольного вектора, направленного радиально и зависящего только от расстояния до центра. $\square$

1.3 Электрическое поле в веществе.

1.3.1 Влияние вещества на внешнее электрическое поле.

Атомное ядро и электроны занимают ничтожную долю объёма атома, но содержат в себе все его заряды. Такое поле назовём *микрполем*: $E_{\text{micro}}, \rho_{\text{micro}}$. Из-за принципиальной невозможности внести в такое поле пробный заряд оказывается невозможным изучить его свойства. Классическая физика всё же допускает такую возможность (Лоренц, *микроскопические процессы*), которой мы и воспользуемся.

Сглаженные поля и гладкие распределения зарядов назовём *макрополем*: E, ρ . Более точно, это усреднение поля по физически бесконечно малым объёмам:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}_{\text{micro}} dV.$$

Объём V назовём *физически бесконечно малым*, если он содержит очень много атомов и в то же время с ним можно обращаться, как с математическим дифференциалом.

При внесении вещества в электрическое поле электроны первого испытывают смещение против поля (потому что они заряжены отрицательно). Смещения атомных ядер при этом малы. Из-за этого возникает частичное разделение зарядов на положительные и отрицательные. Явление такого разделения (перераспределения) называют *электрической индукцией*. Влияние вещества на внешнее электрическое поле сводится к возникновению *индукционных зарядов*.

1.3.2 Проводники в электрическом поле.

В металлах имеются электроны, которые в пределах тела могут перемещаться на любое расстояние, поэтому их называют *свободными*. Если бы внутри однородного проводника существовало макроскопическое поле, то оно привело бы в движение свободные электроны. Поэтому необходимым условием равновесия зарядов в проводнике является отсутствие поля внутри проводника. В силу теоремы Гаусса это означает, что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0$.

Значит, *электричество может располагаться только на поверхности, а не внутри проводника*.

Допустим, внутри проводника имеются электрические заряды. Тогда притяжение разноимённых зарядов приведёт к их нейтрализации, а отталкивание одноимённых приведёт к их максимальному отдалению. (Причём заряды не могут зависнуть на полпути к поверхности, так как по теореме Ирншоу никакая статическая конфигурация зарядов не может быть

устойчивой.) Значит, поверхностная плотность заряда максимальна там, где поверхность тела выпукла и имеет наибольшую геометрической кривизну.

Возьмём заряженную металлическую сетку с прикрепленными к ней бумажками (рис. 1.5). Если её изогнуть, то на выступающих местах бумажки поднимутся выше, чем на вогнутых.

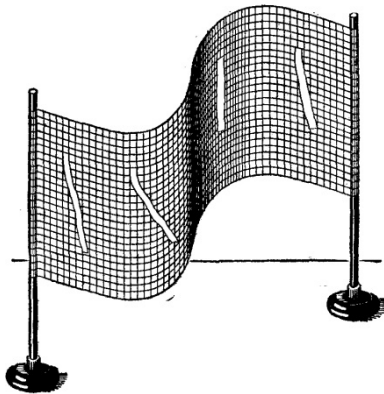


Рис. 1.5: Заряженная сетка на изолирующих стержнях.

Иногда на остриях заряженного проводника плотность заряда настолько большая, что *электричество начинает стекать*: вблизи острия поле очень сильное, поэтому молекулы воздуха заряжаются и притягиваются. Соприкоснувшись, они отлетают с большой скоростью и создают ток заряженных частиц воздуха, называемый *электрическим ветром*. Им можно погасить зажжённую свечу.

На поверхности проводника силовые линии перпендикулярны, поскольку тангенсальная составляющая при переходе через границу двух сред непрерывна; внутри была ноль, значит, снаружи тоже. Получается, что

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}, \quad d\mathbf{f} = \frac{\sigma}{2}\mathbf{E}dS = \frac{1}{8\pi}E^2\mathbf{n} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n}.$$

1.3.3 Теорема Фарадея.

Замкнутая проводящая оболочка разделяет всё пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении совершенно независимые. В частности:

- сумма индуцированных зарядов на внутренней поверхности проводящей оболочки равна и противоположна по знаку сумме зарядов, окружённых этой оболочкой;
- кулоновское поле зарядов, окружённых проводящей оболочкой, и зарядов, индуцированных на её поверхности, равно нулю во всём внешнем

пространстве;

— внешние заряды не создают в полости никакого электрического поля.

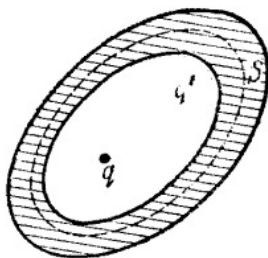


Рис. 1.6: К теореме Фарадея.

Пример. Рассмотрим *цилиндр Фарадея*. Это длинный металлический сосуд цилиндрической формы, насаженный на стержень электроскопа. Внесём в цилиндр заряженный шар. Стрелка электроскопа отклонится. Если шар погружен достаточно глубоко, то при любых его перемещениях угол стрелки не изменяется. Если соприкоснуть шар со стенкой цилиндра — угол не изменится, так как весь его заряд перейдёт в наружную поверхность.

Заряд шара полностью уходит на полое тело. Таким образом его можно зарядить сколь угодно сильно.

Аналогично работает *клетка Фарадея* (рис. 1.7). □

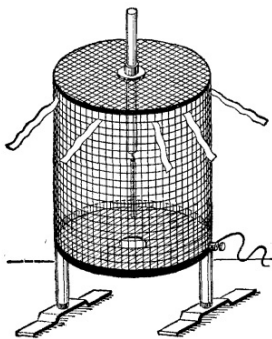


Рис. 1.7: Клетка Фарадея.

1.3.4 Поляризация диэлектриков.

В *диэлектриках* нет свободных зарядов, но в них тоже возможна индукция. Если поднести к заряженному электроскопу диэлектрик (рис. 1.8), то отклоне-

ние стрелки уменьшится, так как часть зарядов с неё перетягивается на шар для наведения зарядов на диэлектрике.

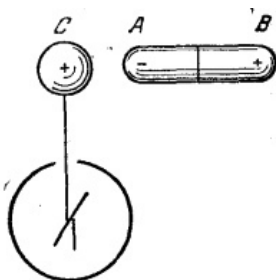


Рис. 1.8: Заряженный электроскоп и диэлектрик.

Однако если раздвинуть половинки диэлектрика, они окажутся незаряженными. Это демонстрирует отсутствие свободы перемещения зарядов в диэлектрике. Дело в том, что они могут смещаться лишь на маленькие расстояния, порядка атомных.

Наведение зарядов в диэлектрике называют *поляризацией*. На двух противоположных сторонах диэлектрика выступают нескомпенсированные разноимённые заряды, которые называют *поляризационными* (рис. 1.9). При *однородной* поляризации все остальные заряды, расположенные в внутри проводника, компенсируют друг друга. При *неоднородной* поляризации в диэлектрике могут возникнуть объёмные *связанные заряды*. Выделим три вида поляризации: упругая, ионная, ориентационная и кристаллическая.

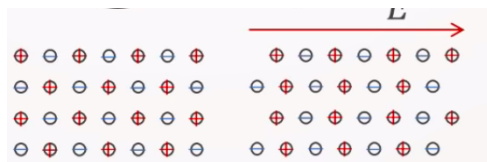


Рис. 1.9: Поляризация (случай ионного кристалла).

При *упругой поляризации* заряд перераспределяется в самих молекулах, из-за чего они становятся диполями, ориентированными по полю.

Помимо нейтральных молекул в диэлектрике могут быть *ионы*, которые являются свободными зарядами. Они возникают, например, при электризации трением или при облучении. Поляризацию таких диэлектриков называют *ионной*.

Некоторые диэлектрики состоят не из нейтральных, а из изначально полярных молекул. В этом случае *ориентационной поляризацией* называют их выстраивание вдоль линий внешнего поля (рис. 1.10).

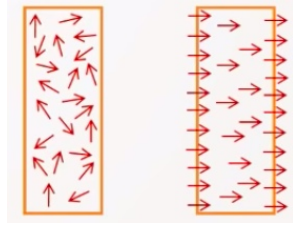


Рис. 1.10: Ориентационная поляризация

Наконец, существуют диэлектрические *ионные кристаллы*, имеющие структуру ионной решётки. По сути кристалл – это гигантская молекула. При поляризации кристалла сдвигаются сами решётки разноимённых ионов.

1.3.5 Вектор поляризации.

Вектором поляризации называют дипольный момент единицы объёма диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (1.17)$$

С его помощью можем выразить *плотность заряда поляризации*:

$$PV = \sum_i p_i = \sigma_{\text{pol}} SL \Rightarrow \sigma_{\text{pol}} = P \frac{V}{SL} = P \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \mathbf{n}. \quad (1.18)$$

Эта формула говорит, что *нормальная компонента вектора поляризации является количеством электричества, смещаемого через единичную площадку в направлении нормали к ней*.

Ещё эта формула позволяет посчитать величину поляризационного заряда:

$$Q_{\text{surf}} = \oint_S \sigma_{\text{pol}} dS = \oint_S \mathbf{P} \mathbf{n} dS = \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (1.19)$$

Отсюда же следует величина связанного заряда поляризации в объёме:

$$Q_{\text{vol}} = -Q_{\text{surf}}$$

$$Q_{\text{vol}} = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S};$$

$$\int_V \rho_{\text{pol}} dV = - \int_V \text{div } \mathbf{P} dV$$

$$\rho_{\text{pol}} = - \text{div } \mathbf{P}. \quad (1.20)$$

1.3.6 Теорема Гаусса для диэлектриков.

Только что мы выяснили, как диэлектрик влияет на внешнее электрическое поле: он добавляет поляризационные заряды. Значит, с учётом поляризационных зарядов, теорема Гаусса будет выглядеть так:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi(q + q_{\text{pol}})$$
$$\oint (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) d\mathbf{S} = 4\pi q, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1.21)$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q. \quad (1.22)$$

Вектор $\mathbf{D}$ называют *вектором электрической индукции*. Его использование обобщает теорему Гаусса для случая электрического поля в диэлектрике. Дифференциальная форма теперь выглядит так:

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$$
$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{pol}}).$$

Обратим внимание, что величины q, ρ имеют отношение к свободным зарядам.

1.3.7 Граничные условия электростатики в веществе.

Из теоремы Гаусса можно вывести, что вектор электрической индукции испытывает скачок при переходе через заряженную границу двух сред:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (1.23)$$

Из теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{E}$ можно вывести, что тангенсальная составляющая напряжённости электрического поля сохраняется:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Принципиальный способ измерить $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ в диэлектрике – сделать полость и внести в неё пробный заряд.

— Пусть полость имеет форму очень длинного и тонкого цилиндра, ось которого параллельна полю $\mathbf{E}$. Он должен быть длинным, чтобы поляризационные заряды на его концах не влияли на поле внутри. Он должен быть тонким, чтобы его удаление не меняло поля в окружающем диэлектрике. Тогда в силу равенства тангенсальных компонент, получаем, что поле $\mathbf{E}_0$ в полости равно полю $\mathbf{E}$ в диэлектрике.

— Пусть полость имеет форму очень короткого цилиндра, основания которого перпендикулярны индукции $\mathbf{D}$. Он должен быть маленьким, чтобы его удаление не меняло индукцию в окружающем диэлектрике. Он

должен быть коротким, чтобы поляризационные заряды на его основаниях влияли на поле внутри. Тогда в силу равенства индукций при переходе через незаряженную границу, индукция $\mathbf{D}_0$ в полости равна индукции $\mathbf{D}$ в диэлектрике.

1.3.8 Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость.

Опыты показывают, что для весьма обширного класса диэлектриков связь между векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ является *линейной и однородной*:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \alpha \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Число α – безразмерный коэффициент *поляризуемости* диэлектрика. Число $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ – диэлектрическая *проницаемость*.

Для ионных кристаллов эта зависимость определяется *тензором поляризуемости* $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{E}.$$

Электрет – это диэлектрик, который способен сохранять поляризованность на протяжении нескольких часов, суток и даже лет. Его поляризуют в расплавленном виде и дают затвердеть. В нём связь между векторами поляризации и поля описывается так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \alpha \mathbf{E}.$$

Пример. Опыт с *лейденской банкой*. Возьмём банку, наружной обкладкой которой служит длинная металлическая труба. В неё вставляется трубка из кварца, а в неё – металлический стержень. Заземлив наружную обкладку и зарядив внутреннюю, разбираем конструкцию и, соприкасая, разряжаем обкладки. Затем вновь собираем, но без подзарядки, и разбираем. Обкладки оказались заряжены. Если повторить это действие много раз, то обкладки ещё долго будут заряжаться от кварца. Это демонстрирует, что кварц может долго сохранять поляризованность. $\square$

1.3.9 Преломление силовых линий.

Рассмотрим поведение силовых линий при прохождении через границу раздела двух диэлектриков (рис. 1.11). Если на ней нет свободных зарядов, то

$$\begin{aligned}E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Leftrightarrow E_1 \sin \beta_1 = E_2 \sin \beta_2, \quad \varepsilon_1 E_1 \cos \beta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \beta_2 \\ &\Rightarrow \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.\end{aligned}$$

То есть *при переходе из диэлектрика с меньшей проницаемостью в диэлектрик с большей силовая линия отдалается от нормали к границе*

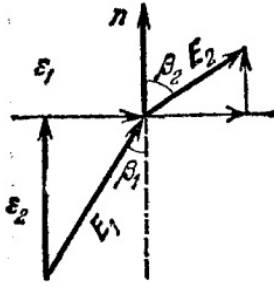


Рис. 1.11: Преломление силовых линий электрического поля.

раздела. С этим связана сгущение силовых линий в диэлектрике с большой проницаемостью.

1.3.10 Пример: поле равномерно поляризованного шара.

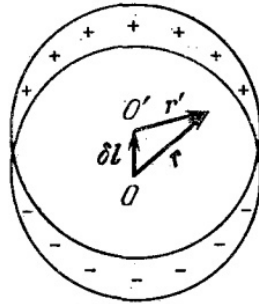


Рис. 1.12: Модель поляризации шара.

Пусть в диэлектрическом шаре до поляризации была однородная смесь положительного и отрицательного электричества с плотностями $-\rho, +\rho$. Поляризацию шара можно представить как смещение δl положительно заряженного шара относительно отрицательного (рис. 1.12). Вектор поляризации тогда $\mathbf{P} = \rho \delta l$.

Поле внутри такого шара складывается из двух полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{4\pi\rho}{3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{4\pi\rho}{3}\mathbf{r}' \Rightarrow \\ \mathbf{E}_{\text{in}} &= \frac{4\pi\rho}{3}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -\frac{4\pi\rho}{3}\delta l = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Поле вне шара совпадает с полем точечного диполя с моментом $\mathbf{p} =$

$V\mathbf{P}$, так что

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = V \left[\frac{3(\mathbf{P}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{P}}{r^3} \right].$$

Чтобы найти поле на границе, следует положить $V = 4\pi r^3/3$:

$$\mathbf{E}_{\text{border}} = 4\pi(\mathbf{P}\mathbf{n})\mathbf{n} - \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}.$$

Поскольку диэлектрик поляризован однородно, на внешнее поле $\mathbf{E}'$ накладывается поле поляризации $\mathbf{E}_{\text{in}}$. То есть суммарное поле $\mathbf{E}$ внутри диэлектрика будет равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\alpha\mathbf{E} \\ \mathbf{E}' &= \frac{\varepsilon + 2}{3}\mathbf{E}. \end{aligned}$$

1.4 Циркуляция вектора $\mathbf{E}$.

1.4.1 Теорема о циркуляции.

Пусть в вакууме находится заряд Q . Пусть в его поле перемещается заряд q . Работа, совершаемая силами поля при его перемещении из точки 1 в точку 2 выражается криволинейным интегралом:

$$A_{12} = \int_{12} q\mathbf{E}d\mathbf{r} = qQ \int_{12} \frac{\mathbf{r}d\mathbf{r}}{r^3} = qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}.$$

Получили, что при любом выборе начальной и конечной точек 1 и 2 работа зависит только от самих точек, а не от пути интегрирования. Это доказывает, что *электростатическое поле точечного заряда является потенциальным*. А поскольку любую систему зарядов можно разделить на малые части, каждую из которых можно рассматривать как точечный заряд, *любое электростатическое поле является потенциальным*.

Теорема (о циркуляции). *Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по контуру всегда равна нулю:*

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0. \quad (1.25)$$

► Рассмотрим два пути из точки 1 в 2: путь 132 и путь 142.

$$A_{132} = A_{142} \Leftrightarrow A_{132} + A_{241} = 0 \Leftrightarrow A_{13241} = 0 \Leftrightarrow q \oint \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

□

Следствие. Из теоремы о циркуляции следует, что *силовые линии не могут быть замкнутыми*. Иначе можно было бы взять контур, совпадающий с силовой линией. Скалярное произведение силы и перемещения на нём было бы всегда положительным, а значит, работа могла бы быть сколь угодно большой. *Квазизамкнутость* тоже невозможна.

Следствие. С помощью теоремы о циркуляции можно строго доказать равенство тангенсальный компонент поля при переходе через границу:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} d\mathbf{r} = (E_{2\tau} - E_{1\tau})BC = 0 \Rightarrow E_{2\tau} = E_{1\tau}$$

1.4.2 Электрический потенциал.

Потенциалом электрического поля в точке M называют работу, которую совершает поле при перемещении единичного заряда из этой точки в точку O , где договорились считать потенциал равным нулю:

$$\varphi = \int_M^O \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

В теоретической физике за нулевой потенциал удобно брать бесконечно удалённую точку, а на практике – потенциал Земли. У нас есть такая свобода выбора, потому что *потенциал определён с точностью до аддитивной константы, задаваемой выбором точки O* .

В СГСЭ за единицу потенциала считают разность потенциалов между такими двумя точками, что при перемещении единицы заряда поле совершает работу в один эрг. Одна СГСЭ-единица потенциала равна 300 вольтам.

Из определения следует связь между вектором $\mathbf{E}$ и потенциалом в точке:

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{r} &= \int_A^O + \int_O^B = \varphi_A - \varphi_B \\ \mathbf{E} d\mathbf{r} &= -d\varphi \\ \mathbf{E} d\mathbf{r} &= -(\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}) \\ \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Это означает следующее. Произвольная вектор-функция $\mathbf{a}(x, y, z)$ характеризуется тремя скалярными функциями: a_x, a_y, a_z . Однако поскольку векторное поле $\mathbf{E}$ потенциально, то для его характеристики достаточно одной скалярной функции, а именно, его потенциала.

Чисто для справки вспомним, что градиент функции направлен в сторону наибольшего роста функции, а его длина равна производной функции по этому направлению. Поэтому полученное соотношение показывает, что *положительное направление поля совпадает с направлением от точки с большим потенциалом в точку с меньшим.*

Потенциалом тела (обычно проводника) мы называем потенциал на его поверхности.

1.4.3 Точечный диполь.

1°. Потенциал в точке $\mathbf{r}$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.28)$$

2°. Энергия диполя во внешнем поле:

$$W = -\mathbf{p}\mathbf{E}.$$

Докажем эту формулу. Энергия точечного заряда q с потенциалом φ равна $q\varphi$. Тогда

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q \frac{\partial \varphi}{\partial l} l = -qE_l l = -\mathbf{p}\mathbf{E}.$$

3°. Энергия взаимодействия двух точечных диполей:

$$W = \frac{(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{p}_1)(\mathbf{r}\mathbf{p}_2)}{r^5}. \quad (1.29)$$

Докажем эту формулу. Пусть диполь $\mathbf{p}_1$ создаёт поле $\mathbf{E}_1$. Тогда второй диполь имеет энергию

$$W = -\mathbf{p}_2\mathbf{E}_1.$$

Пользуясь формулой для $\mathbf{E}_1$, получаем ответ.

1.4.4 Вычисление потенциала по напряжённости поля.

Потенциал точечного заряда в однородном диэлектрике:

$$\begin{aligned} D &= \frac{q}{r^2} \\ -\varepsilon \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{q}{r^2} \\ \varphi &= \frac{q}{\varepsilon r} + \text{const.} \end{aligned}$$

Поскольку φ зависит от $\mathbf{E}$ аддитивно, то для потенциала тоже верен принцип суперпозиции:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}. \quad (1.30)$$

В случае непрерывного распределения по объёму и поверхности:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (1.31)$$

В случае неоднородной поляризации среды:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV + \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') + \sigma_{\text{pol}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dS, \quad (1.32)$$

где σ_{pol} – связанные заряды поляризации.

1.5 Общая задача математической электростатики.

1.5.1 Мотивировка и формулировка.

Если известен потенциал φ в любой точке пространства, то продифференцировав его мы вычислим напряжённость $\mathbf{E}$ электрического поля. Зная проницаемость среды ε найдём вектор индукции $\mathbf{D}$. По теореме Гаусса выразим объёмную плотность свободных зарядов ρ . Поверхностную плотность свободных зарядов найдём по скачку нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$.

Если известны плотности свободных и связанных зарядов, то интегрированием можем найти потенциалы и затем всё остальное.

Реальные задачи электростатики гораздо сложнее. В общем случае она формулируется так. *В диэлектрической среде с известной проницаемостью заданы расположение и форма всех проводников. Известна объёмная плотность свободных зарядов во всех точках среды. Для каждого проводника известен либо потенциал, либо заряд. Требуется определить напряжённость поля во всех точках пространства и распределение зарядов на поверхностях проводников.*

Найдём потенциал $\varphi(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) &= -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \\ \Delta\varphi &= -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Значит, потенциал φ должен удовлетворять уравнению Пуассона. Если свободные заряды отсутствуют, то уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1.34)$$

Нахождение решения таких уравнений это сложная задача, которая не всегда решается аналитически. Однако, *если решение существует, то оно единственно*.

Важно заметить, что в силу теоремы Фарадея, не обязательно задавать потенциал или заряды во всех точках пространства. Достаточно задать внутри полости проводника или снаружи, в зависимости от того, где нам нужен результат.

Пример. Пусть в вакууме распределен заряд с плотностью ρ . Потенциал поля удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_0 = -4\pi\rho$. Заполним пространство диэлектриком. В силу теоремы единственности, новый потенциал равен $\varphi = \varphi_0/\varepsilon$. Это означает, что диэлектрик уменьшает потенциал поля.

Докажем теорему Фарадея. Итак, потенциал внутри полости удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$. На стенках полости он должен принимать постоянное значение C . Тогда в силу теоремы единственности решением будет $\varphi \equiv C$. Значит, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = 0$. Теорема доказана. $\square$

1.5.2 Метод электрических изображений.

Пусть в пространстве имеется несколько точечных зарядов. Пусть S – произвольная эквипотенциальная поверхность, она разделяет пространство на два полупространства I, I' . Пусть q_i и q'_i – заряды в полупространстве I и I' соответственно (рис. 1.13).

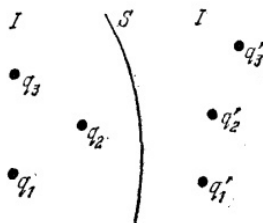


Рис. 1.13: Метод электрических изображений

Получили две электростатические задачи, к которым применима теорема единственности. Если поверхность S сделать проводящей, то поле не претерпит никаких изменений, а поля I, I' станут независимыми. А именно, в полупространстве I поле, создаваемое зарядами из полупространства I' эквивалентно полю, создаваемому индукционными зарядами на S .

Совокупность полей в полупространстве I , исходящих из полупространства I' , называют *электрическим изображением* зарядов q'_i в поверхности S . *Задача об электрическом поле зарядов, расположенных по одну сторону от проводящей поверхности, сводится к отысканию электрических изображений этих зарядов в поверхности.*

Пример. Рассмотрим точечный заряд q над бесконечной проводящей плоскостью AB . Электрическим изображением q в поверхности AB будет заряд q' , симметричный q относительно AB (рис. 1.14) Это так, поскольку поверхность AB для них будет эквипотенциальной.

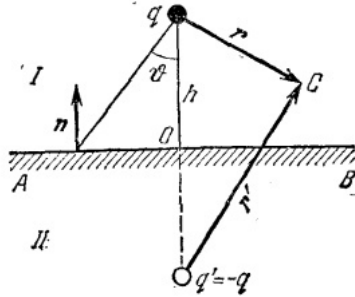


Рис. 1.14: Применение метода электрических изображений.

Тогда в произвольной точке C потенциал заряда q и индуccionных зарядов на проводнике совпадает с потенциалом зарядов q, q' :

$$\varphi(C) = q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

Рассчитаем поверхностную плотность индуccionного заряда (рис. 1.14)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{q'}{r(x, y)} = \frac{-q}{\sqrt{x^2 + (y + h)^2}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{q(y + h)}{(x^2 + (y + h)^2)^{3/2}} = \{y = 0, x = \tan \vartheta\} = \frac{q}{h^2} \cos^3 \vartheta. \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi} E_n = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{q}{h^2} \cos^3 \vartheta. \end{aligned}$$

Докажем с помощью теоремы Гаусса, что полный индуccionный заряд на AB равен $-q$. Поместим заряд q и часть плоскость в большую сферу. В верхней полусфере в силу метода изображений поле совпадает с полем точечного диполя, поэтому $\mathbf{E} \sim 1/r^3$. Поверхность сферы $S \sim r^2$. Поэтому поток через сферу $\Phi \sim 1/r$ при бесконечном расширении стремится к нулю. Значит, суммарный заряд внутри бесконечно большой сферы равен нулю. То есть на плоскости индуцируется заряд, компенсирующий q . $\square$

Пример. Пусть сфера S имеет радиус a и нулевой потенциал (заземлена), а вне сферы находится точечный заряд q (рис. 1.15). Эти условия однозначно определяют условие электростатической задачи: найти поле вне сферы.

На прямой OA выберем точку C такую, что треугольники OBC, OBA подобны. В эту точку поместим точечный заряд q' . Потенциал зарядов q, q' в точке B будет равен $q/b + q'/b'$. Он обращается в ноль при

$$q' = -\frac{b'}{b} q = -\frac{a}{R} q,$$

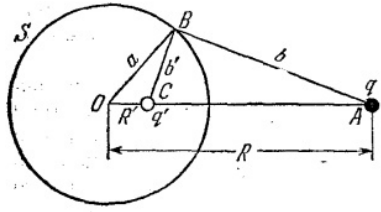


Рис. 1.15: Теорема Гаусса для точечного заряда и бесконечной проводящей плоскости.

причём это происходит независимо от выбора точки B на сфере. Значит, q' является электрическим изображением заряда q в поверхности S . Тогда потенциал вне сферы определяется как

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}.$$

Докажем, что индукционный заряд на сфере равен q' . Поместим сферу внутри замкнутой поверхности Σ так, чтобы q туда не входил. По теореме Гаусса $\Phi = 4\pi q' = 4\pi q_{\text{sphere}} \Rightarrow q' = q_{\text{sphere}}$.

Если по условию потенциал сферы равен φ_0 , то для решения задачи нужно поместить фиктивный заряд $q_0 = a\varphi_0$ в центр сферы. Тогда поле по внешнему пространству представится суперпозицией полей от q, q', q_0 .

Если сфера изолирована и имеет заряд q_0 , то к зарядам q, q' нужно просто добавить заряд q_0 . □

1.6 Ёмкость проводников и конденсаторов.

1.6.1 Уединённый проводник.

Если рассмотреть уединённый проводник, то опыты показывают, что его суммарный заряд на поверхности прямо пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называют *ёмкостью уединённого проводника*:

$$q = C\varphi.$$

В системе СГС ёмкость измеряется в сантиметрах, а в СИ – в фарадах. Один фарад равен 9×10^{11} см.

Пример. Например, ёмкость уединённого шара можно вычислить по определению потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_R^\infty E_r dr = \int_R^\infty \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{R} \\ \Rightarrow C &= \frac{q}{\varphi} = R. \end{aligned} \tag{1.35}$$

□

1.6.2 Конденсатор.

Заметим, что если проводник не уединён, то при приближении других тел, его ёмкость будет увеличиваться. Действительно, на этих телах проводник наведёт заряды, которые будут уменьшать суммарный потенциал на поверхности проводника.

На этом факте основан принцип действия *конденсатора*. Конденсатор всегда состоит из двух металлических обкладок и слоя диэлектрика между ними. Пусть разница потенциалов обкладок равна U . Ёмкостью конденсатора называют константу C такую, что

$$q = CU. \quad (1.36)$$

Ёмкость как конденсатора зависит только от размеров и устройства конденсатора.

1.6.3 Плоский конденсатор.

Обкладками *плоскому конденсатору* служат плоские пластины, расположенные на расстоянии d и имеющие площадь S . У идеального конденсатора расстояние между пластинами много меньше линейного размера пластин.

$$U = \frac{E}{\varepsilon} d = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} d \Rightarrow \quad (1.37)$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q\varepsilon}{4\pi\sigma d} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \quad (1.38)$$

1.6.4 Ёмкость шарового и цилиндрического конденсаторов.

Обкладками *шарового конденсатора* служат две концентрические сферы. Ёмкость шарового конденсатора равна

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow C = \frac{q}{U} = \frac{R_1 R_2 \varepsilon}{R_2 - R_1}.$$

Если $R_1 \approx R_2$ и $R_2 - R_1 = d$, то $S \approx 4\pi R_1 R_2$ и $C \approx \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$.

Ёмкость цилиндрического конденсатора:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{2q}{l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{2q}{l} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \quad (1.39)$$

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln(b/a)}. \quad (1.40)$$

Пример. Возьмём плоский конденсатор. Пластину A соединим с электроскопом, а пластину B заземлим. Если раздвинуть пластины, то стрелка электроскопа отклоняется сильнее.

Дело в том, что $C \sim 1/d$, поэтому при разведении пластин ёмкость конденсатора уменьшается. Заряд пластины A не меняется, так как она изолирована, поэтому растёт разность потенциалов: $\varphi = q/C$.

Это явление можно объяснить напрямую с помощью закона Кулона. При соединении пластины A с электроскопом часть зарядов уходит на шар электроскопа. Когда пластина B рядом, оставшиеся заряды пластины A удерживаются полем B . Если пластину B отодвинуть, то эти заряды уходят к электроскопу и отклоняют стрелку.

Правда в том, что у идеального конденсатора напряжённость поля между пластинами не зависит от расстояния. Наблюдаемый эффект относится к *краевым эффектам*, то есть к эффектам, обусловленным конечностью пластин.

Введя между пластинами конденсатора лист бумаги, Фарадей впервые установил влияние промежуточной среды на электрическое поле. $\square$

1.6.5 Параллельное и последовательное соединение конденсаторов.

При *параллельном* соединении конденсаторов заряды обкладок складываются, поэтому

$$C = C_1 + C_2. \quad (1.41)$$

Параллельное соединение используют для увеличения ёмкости (рис. 1.16).

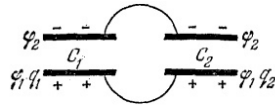


Рис. 1.16: Параллельное соединение.

При *последовательном* соединении конденсаторов чуть сложнее:

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_3 &= (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3), \\ \varphi_1 - \varphi_3 &= \frac{1}{C}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C_1}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{1}{C_2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Последовательное соединение используют для распределения напряжения по конденсаторам с целью избежать пробоя. (рис. 1.17).

Слоистый плоский конденсатор (рис. 1.18) можно представить как последовательно соединённые конденсаторы, поэтому

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi}{S} \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \dots \right).$$

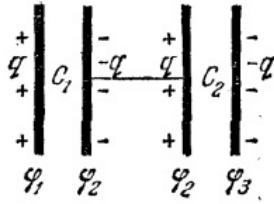


Рис. 1.17: Последовательное соединение.

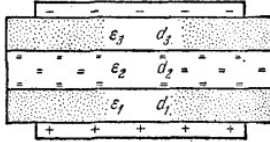


Рис. 1.18: Слоистый плоский конденсатор.

1.7 Электрическая энергия.

1.7.1 Взаимная энергия проводников.

Рассмотрим систему из двух заряженных проводников. Они действуют друг на друга с силами $\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$. Пусть в результате взаимодействия они совершили смещения $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$. Тогда была совершена следующая работа:

$$\begin{aligned} \delta A_{12} &= \mathbf{F}_{12} d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}_{21} d\mathbf{l}_1 \\ &= \mathbf{F}_{12} (d\mathbf{l}_1 - d\mathbf{l}_2) \\ &= \mathbf{F}_{12} d\mathbf{l}_{21} \\ &= -dW_{12} = -dW_{21}. \end{aligned}$$

То есть работа электростатических сил уходит на изменение потенциальной энергии взаимодействия системы. Очевидно, что это верно и для системы из произвольного числа точечных зарядов:

$$\delta A = -dW. \quad (1.43)$$

Суммарная энергия взаимодействия системы проводников равна

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i \neq j} W_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} W_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i W_i. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Энергия W_i равна энергии взаимодействия проводника i со всеми остальными. Её можно выразить через величину φ_i , равную потенциалу проводника $j \neq i$ в точке i :

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i. \quad (1.45)$$

1.7.2 Полная энергия взаимодействия.

Заметим, что в формуле (1.45) в потенциал φ_i не входят заряды dq , которые являются частью самого проводника q_i . Поэтому эта формула выражает неполную энергию взаимодействия. Поэтому, к примеру, для системы из двух проводников полная энергия будет выражаться как

$$W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) + W_1 + W_2,$$

где W_1, W_2 – энергии взаимодействия проводника q_i «с самим собой» (*собственная энергия*). Непрерывный случай будет описываться интегралом

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS. \quad (1.46)$$

где φ – потенциал в данной точке.

1.7.3 Энергия уединённого проводника.

Собственную энергию уединённого проводника можно посчитать с помощью формулы (1.46). Тогда получится

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.47)$$

1.7.4 Энергия конденсатора.

Собственную энергию конденсатора введём как полную энергию взаимодействия его обкладок:

$$W = \frac{1}{2}(q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_-) \quad (1.48)$$

$$= \frac{1}{2} q_+ (\varphi_+ - \varphi_-) \quad (1.49)$$

$$= \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.50)$$

Полнота (а не просто взаимность) энергии учтена тем, что мы используем U , а не φ_1, φ_2 .

1.7.5 Энергия электрического поля.

Энергия электрического поля в изотропном диэлектрике выражается по формуле

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (1.51)$$

Подынтегральное выражение означает, что энергия электрического поля *локализована* в объёме dV с плотностью

$$w = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \mathbf{D}.$$

Изотропным называют диэлектрик, для которого выполняется линейная зависимость $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$.

Глава 2

Электрический ток.

2.1 Плотность тока. Закон сохранения электрического заряда.

Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов. Эти заряды называют *носителями тока*. В металлах носители тока это электроны, а в электролитах и газах – ионы.

Выделим бесконечно малый цилиндр (рис. 2.1).

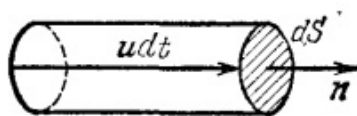


Рис. 2.1: Электрический ток

Плотностью электрического тока называют вектор

$$\mathbf{j} = \frac{dq}{dt dS} \mathbf{n}. \quad (2.1)$$

Из определения плотности тока следует *закон сохранения электрического заряда*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= - \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV &= - \int \operatorname{div} \mathbf{j} dV \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Последнее соотношение ещё называют *уравнением непрерывности*. Для стационарных токов получаем выражения:

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.3)$$

Полным током называют

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt} \quad (2.4)$$

2.2 Закон Ома.

2.2.1 Сопротивление проводника.

Эмпирически установлено, что для многих тел плотность тока $\mathbf{j}$ пропорциональна напряжённости внешнего поля $\mathbf{E}$.

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

где λ – *удельная проводимость*, она зависит только от тела и его физического состояния. *Сопротивлением материала* называют

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.6)$$

Сопротивление в СГСЭ измеряется в обратных секундах.

2.2.2 Электрическое поле стационарного тока.

Рассмотрим постоянный ток. Если ток стационарный, то $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \rho = 0$. То есть в стационарных токах макроскопические заряды могут находиться только на поверхности проводника или в местах неоднородности. Как показывают опыты, стационарные токи создают кулоновские поля, а значит, потенциальные. Отличие их от электростатических полей в том, что внутри провода они не равны нулю. Если бы это было так, то из закона Ома следует, что ток $\mathbf{j} = 0$.

2.2.3 Электродвижущая сила.

Заметим, что в цепи постоянного тока обязательно есть сторонние неэлектростатические силы, потому что если их нет, то разность потенциалов убывает.

Рассмотрим постоянный электрический ток по тонким проводам. Сила тока по всей длине провода одинакова и равна

$$I = jS.$$

По закону Ома:

$$E + E_{\text{ext}} = \frac{j}{\lambda}$$

$$\underbrace{\int_{\varphi_1 - \varphi_2} E dl}_{\mathcal{E}} + \underbrace{\int_{\mathcal{E}} E_{\text{ext}} dl}_{\mathcal{E}} = I \underbrace{\int_R \frac{dl}{\lambda S}}_R \quad (2.7)$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E} = IR. \quad (2.8)$$

Величину $\mathcal{E}$ называют *электродвижущей силой*. Она зависит только от свойств источника внешнего поля. Величину R называют *электрическим сопротивлением провода*. Если он изготовлен из одного материала и всюду имеет одну толщину, то

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2.9)$$

Полученный закон (2.8) называют *законом Ома в интегральной форме*. Если в цепи нет источника тока, то имеем *закон Ома для участка цепи*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR. \quad (2.10)$$

2.2.4 Правила Кирхгофа.

Сумма ЭДС на замкнутом участке цепи равна сумме напряжений. Сумма токов в любом узле равна нулю.

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j I_j R_j, \quad (2.11)$$

$$\sum I_i = 0.$$

Пример. Мостик Уитстона (стр. 200, Сивухин) применяется для измерения сопротивления проводов. Сопротивление R_2 настраивается до тех пор, пока V_G не покажет отсутствие тока. В таком случае с помощью правил Кирхгофа можно показать, что $R_1/R_2 = R_3/R_x$ и найти R_x . $\square$

2.3 Закон Джоуля–Ленца.

Вычислим мощность тепловых потерь в стационарном токе:

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} \Rightarrow dp = \mathbf{v} \mathbf{F} n dV = \mathbf{v} q \mathbf{E} n dV = \mathbf{j} \mathbf{E} dV \quad (2.12)$$

$$P = \int_V dp = \mathbf{j} \mathbf{E} V = (\mathbf{j} \mathbf{S})(\mathbf{E} \mathbf{L}) = IU = IR^2. \quad (2.13)$$

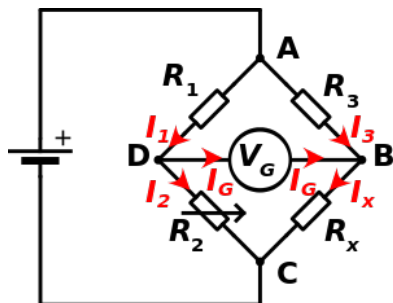


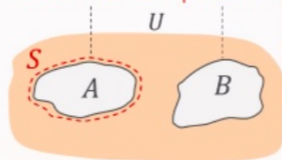
Рис. 2.2: Мостик Уитстона

2.3.1 Закон сохранения энергии в цепях постоянного тока, содержащих ЭДС.

При отсутствии движения проводников и диэлектриков вся работу источников ЭДС переходит в тепло:

$$\sum \mathcal{E} I dt = \sum R I^2 dt. \quad (2.14)$$

Токи в неограниченных средах



ε – диэлектрическая
проницаемость среды

λ – проводимость
среды

$$I = \oint_S j_n \cdot dS = \oint_S \lambda \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \oint_S D_n \cdot dS = \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot 4\pi q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \cdot CU = \left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \cdot C \right) \cdot U$$

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}$$

Народное хозяйство

Глава 3

Магнитное поле.

3.1 Силы, действующие в магнитном поле.

3.1.1 Силы Лоренца и Ампера.

Исторический путь изучения магнитного поля начался с исследования естественных и искусственных магнитов. Мы пойдём иначе: дедуктивно стартанём из двух экспериментально установленных фактов: *магнитное поле действует на движущиеся заряды и движущиеся заряды создают магнитное поле*. Можно ещё сказать, что *индикатором электрического поля является покоящийся заряд, а магнитного – движущийся*.

Закон, определяющий силу, действующую на движущийся в магнитном поле точечный заряд q в вакууме, получен обобщением опытных фактов:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \frac{c}{qv_{\perp}^2}[\mathbf{F}\mathbf{v}_{\perp}]. \quad (3.1)$$

Вектор $\mathbf{B}$ называют *напряжённостью магнитного поля*. Постоянная c имеет размерность скорости. Назовём её *электродинамической постоянной*. Измерения показывают, что она совпадает со скоростью света в вакууме.

Опыты показывают, что электрическое и магнитное поля действуют независимо. Значит, силы их действия на заряд можно сложить и получить *силу Лоренца*:

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}] \right].$$

В нерелятивистском приближении $\mathbf{F}$ не зависит от выбора ИСО. Однако второе слагаемое явно зависит, значит, зависит о первое. Поэтому разделение полной силы $\mathbf{F}$ на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчёта.

Вычислим силу, действующую со стороны магнитного поля на бесконечно тонкий провод с током:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]dN \\ &= \frac{nq}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]dV, \quad \{\mathbf{j} = nq\mathbf{v}\} \\ &= \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{B}]dV, \quad \{jdV = jSdl = Idl\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$= \frac{I}{c}[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (3.3)$$

Эта формула носит название *закона Ампера*. Силы, действующие на токи в магнитных полях, называют *амперовыми силами* (рис. 3.1)

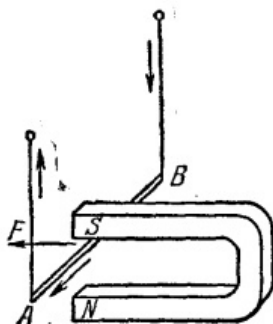


Рис. 3.1: Сила Ампера.

Пример. Рассмотрим *колесо Барлоу*. Медный диск погружён в чашу со ртутью (рис. 3.2). Чаша и ось диска подключаются к источнику тока. Магнитное поле направляют перпендикулярно поверхности диска. Диск вращается.

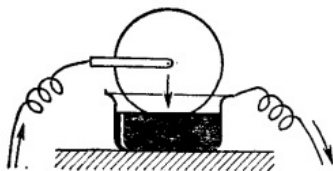


Рис. 3.2: Колесо Барлоу.

Возьмём длинный прямой магнит и установим его вертикально. Подвесим рядом с ним длинную гибкую плетёную металлическую ленту.

При пропускании по ней тока, лента обвивается вокруг магнита. При смене направления тока, направление обвивания меняется.

Опыт Эрстеда. Стрелка устанавливается перпендикулярно проводу с током (рис. 3.3). В этом опыте впервые была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

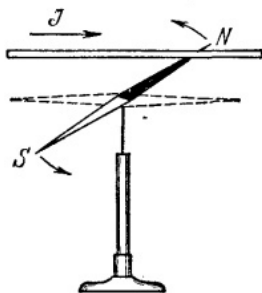


Рис. 3.3: Опыт Эрстеда.

□

3.1.2 Магнитное поле равномерно движущегося заряда.

Пусть заряд q движется равномерно с малой скоростью $\mathbf{v}$. Обобщением опытных фактов установлено, что вектор $\mathbf{B}$ в точке $\mathbf{r}$ равен

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}] = \left\{ \mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \right\} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{E}]. \quad (3.4)$$

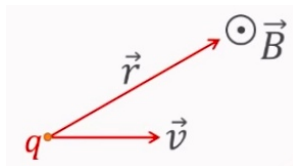


Рис. 3.4: К формуле вектора $\mathbf{B}$ для случая движущегося заряда.

Рассчитаем силу магнитного взаимодействия движущихся точечных зарядов q_1, q_2 :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{q_1}{cr_{12}^3} [\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_{12}] \Rightarrow \mathbf{F}_{12} = \frac{q_2}{c} [\mathbf{v}_2 \mathbf{B}_1] = \frac{q_1 q_2}{c^2 r_{12}^3} [\mathbf{v}_2 [\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_{12}]]. \quad (3.5)$$

Если скорости $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ коллинеарны и перпендикулярны $\mathbf{r}_{12}$, то одноимённые заряды будут притягиваться, а разноимённые отталкиваться (рис. 3.5). Если заряды одинаковы, то

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (3.6)$$

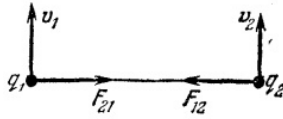


Рис. 3.5: Магнитное взаимодействие точечных зарядов.

В общем случае принцип равенства действия и противодействия для магнитного взаимодействия точечных зарядов не выполняется. Например, в указанной на рис. 3.6 ситуации $F_{21} = 0$, $F_{12} \neq 0$.

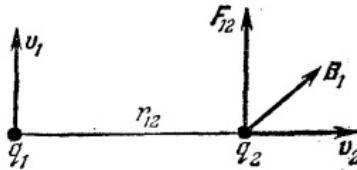


Рис. 3.6: Несоблюдение равенства действия и противодействия

Следствие. Кажалось бы, скорости токов в проводах не превышают нескольких сантиметров в секунду, из-за чего отношение $(v/c)^2$ имеет порядок 10^{-20} . Но поскольку в быту они все равно велики, раз приводят в действия роторы электродвигателей, то делаем вывод, что в токе участвует громадное число частиц.

Следствие. Магнитное поле зависит от произведения qv , а электрическое только от q . Поэтому в то время, как силы действия электрического поля на частицы разного знака вычитаются, силы магнитного поля складываются. А поскольку даже в заряженном теле заряды в большой степени скомпенсированы, то совокупность всех зарядов любого тела бесконечно велика в сравнении с их арифметической суммой. Отсюда получаем объяснение, почему магнитные силы куда больше электрических.

3.1.3 Закон Био и Савара.

В 1820 г. французские физики Жан Батист Био и Феликс Савар, провели исследования магнитных полей токов различной формы. А французский математик Пьер Лаплас обобщил эти исследования. Он проанализировал экспериментальные данные и сделал вывод, что к магнитному полю любого стационарного

тока применим принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{1}{cr^3}[\mathbf{j}\mathbf{r}]dV & \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \int \frac{1}{r^3}[\mathbf{j}\mathbf{r}]dV \\ &= \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]; & &= \frac{1}{c} \oint \frac{I}{r^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Примечательно, что опытной проверке доступен закон Био и Савара только в интегральной формуле, поскольку невозможно изолировать элемент тока.

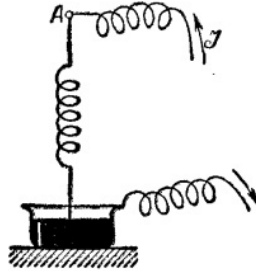


Рис. 3.7: Когда по пружине течет ток, то она сжимается по действием силы Ампера между соседними витками. Из-за этого нижний конец пружины выныривает из ртути и контакт прерывается. Сила Ампера пропадает и пружина растягивается и её конец вновь погружается в ртуть.

3.1.4 Индукция магнитного поля прямого бесконечного проводя с током.

Рассмотрим бесконечный прямолинейный провод с постоянным током I . Магнитное поле элемента $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] = \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l}_{\perp} \times \mathbf{r}].$$

То есть магнитные силовые линии – это концентрические окружности вокруг провода. В скалярной форме можно записать через $d\alpha = d\mathbf{l}_{\perp}/r$ – угол, под которым виден элемент $d\mathbf{l}$ из точки r :

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] = \frac{I}{cr^3}[d\mathbf{l}_{\perp} \times \mathbf{r}] \\ dB &= \frac{I}{cr^2}d\mathbf{l}_{\perp} \\ dB &= \frac{I}{cr}d\alpha. \end{aligned}$$

Расстояние $r = R/\cos \alpha$, где R – расстояние от провода до точки, в которой считаем B . Тогда

$$dB = \frac{I}{cR} \cos \alpha d\alpha \Rightarrow B = \frac{I}{cR} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{2I}{cR}. \quad (3.8)$$

Проще будет посчитать это поле с помощью теоремы о циркуляции вектора $\mathbf{B}$. Рассчитаем силу взаимодействия двух бесконечно длинных токов I_1, I_2 :

$$B_1 = \frac{2I_1}{cR} \Rightarrow F_{12} = \frac{1}{c} B_1 I_2 l = \frac{2}{Rc^2} I_1 I_2 l. \quad (3.9)$$

С помощью формулы (3.9) Вебер и Кольрауш в 1856 году вычислили электродинамическую постоянную c и обнаружили, что она совпадает со скоростью света в вакууме. Теоретические исследования Максвелла показали, что этот результат является выражением электромагнитной природы света.

Знание c позволяет ввести систему СГСМ. В ней заряд вводится как $q^{(m)} = q/c$, поэтому основные формулы записываются как

$$\mathbf{F} = q^{(m)} [\mathbf{vB}], \quad \mathbf{B} = \frac{q^{(m)}}{r^3} [\mathbf{vr}].$$

Десятую долю СГСМ-единицы заряда называют кулоном; силы тока – ампером. *Один гаусс есть напряжённость такого магнитного поля, которое действует на заряд в одну СГСМ-единицу силой в одну дину, если сам заряд движется перпендикулярно к магнитному полю со скоростью 1 см/с.* Система СГСЭ применяется для измерения чисто электрических величин: заряд, напряжённость, индукция, потенциал, ёмкость, ЭДС, сопротивление и т.п. Система СГСМ нужна для измерения чисто магнитных величин: напряжённость, индукция, поток, коэффициенты индукции, магнитные моменты, векторы намагничивания. Гауссова система является комбинированной.

Поле кругового тока на оси:

$$B = \frac{2\pi a^2 I}{cr^3}.$$

3.1.5 Магнитный момент контура с током.

Сила, действующая на один виток с током в постоянном магнитном поле (полная сила Ампера), равна интегралу по контуру витка:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

В случае однородного поля:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \left[\oint d\mathbf{l}, \mathbf{B} \right] = 0.$$

Рассмотрим плоский виток, параллельный магнитному полю $\mathbf{B}$ (рис. 3.8). Выделим элементы тока $d\mathbf{l}_1$, $d\mathbf{l}_2$. Они образуют криволинейный четырёхуголь-

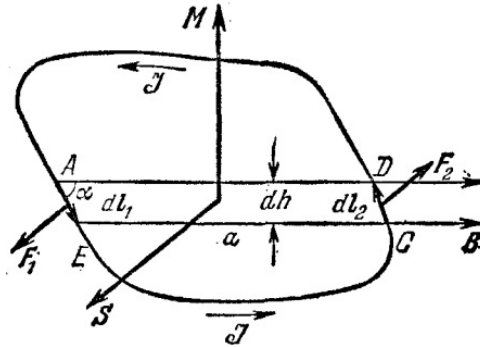


Рис. 3.8: Момент витка с током в постоянном магнитном поле.

ник со сторонами a , dh . Действующие на них амперовы силы перпендикулярны к плоскости витка и противоположны по направлению:

$$F_1 = \frac{1}{c} B I dl_1 \sin \alpha.$$

Момент силы F_1 равен

$$d\mathbf{M} = \frac{1}{c} B I [\mathbf{r} d\mathbf{l}] \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{1}{c} B I \mathbf{S}.$$

Этот результат можно записать через *магнитный момент тока*:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \mathbf{B}], \quad \mathbf{m} = \frac{1}{c} I \mathbf{S}. \quad (3.10)$$

Итак, если $\mathbf{m} \perp \mathbf{B}$, то момент амперовых сил максимален. Если $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$, то момент равен нулю. Такие силы просто растягивают виток (рис. 3.9).

Под действием вращающего момента виток или катушка будут поворачиваться так, чтобы $[\mathbf{M} \mathbf{B}] = 0$ – это положение устойчивого равновесия.

3.2 Теорема Гаусса для магнитных полей.

Магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.11)$$

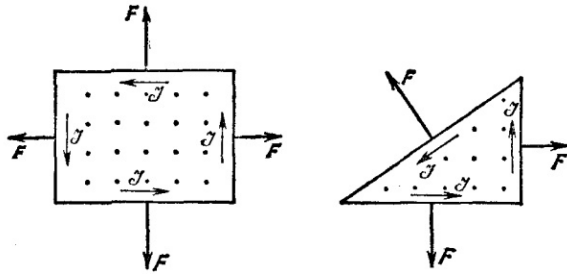


Рис. 3.9: Действие магнитного поля на перпендикулярный ему виток тока.

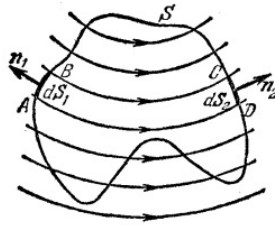


Рис. 3.10: К теореме Гаусса для магнитного поля.

► Пусть заряд равномерно движется с малой скоростью, перпендикулярно плоскости рисунка 3.10 к читателю. Тогда силовыми линиями магнитного поля заряда будут концентрические окружности. Выделим бесконечно тонкую кольцевую трубку $ABCD$. Ввиду осевой симметрии магнитный поток через поперечное сечение трубки постоянен. Трубка пересечёт поверхность чётное число раз: одинаково на вход и выход. $\square$

Эта теорема означает, что *не существует магнитных зарядов*. Поле, дивергенция которого всюду равна нулю, называют *соленоидальными*. Источником магнитного поля могут быть токи, а не заряды.

3.3 Циркуляция вектора $\mathbf{B}$.

3.3.1 Теорема о циркуляции.

Циркуляция магнитного поля постоянных токов по всякому замкнутому контуру равна сумме токов, пронизывающих контур циркуляции, умноженной на $4\pi/c$:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (3.12)$$

Эта теорема имеет следующий смысл: там, где нет токов, магнитное поле потенциально; там, где есть токи, поле непотенциально.

Пример. Вернёмся к примеру с бесконечным прямым проводом. Силовые линии его магнитного поля являются окружностями. Циркуляция вектора $\mathbf{B}$ ним равна $2\pi RB$. С другой стороны, по теореме она равна $4\pi I/c$. Тогда

$$B = \frac{2I}{cR}. \quad (3.13)$$

То же самое, что мы получали непосредственным интегрированием.

Рассмотрим провод в виде бесконечно длинного цилиндра радиуса R . Снаружи провода поле определяется той же формулой (3.13). Внутри силовые линии тоже являются концентрическими окружностями. Рассмотрим окружность радиуса $a < R$. Циркуляция по ней равна $2\pi RB$; с другой стороны $4\pi I'/c$, где $I' = IR^2/a^2$. Тогда

$$B = \frac{2I}{ca^2} R.$$

Если провод полый, то внутри цилиндра поле равно нулю. □

3.3.2 Магнитное поле соленоида.

Поле бесконечного соленоида (рис. 3.11) при удалении точки наблюдения в бесконечность стремится к нулю. Применим теорему о циркуляции к контуру

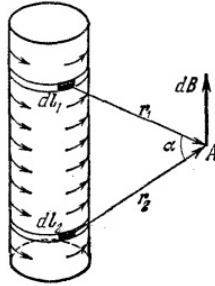


Рис. 3.11: Бесконечный соленоид

$ABCD$ (рис. 3.12), где AB лежит внутри соленоида, а CD бесконечно удалена. Участки BC, AD не вносят вклада в циркуляцию $\mathbf{B}$, так как поле к ним ортогонально. Не вносит вклада и сторона CD , так как поле в бесконечности равно нулю. Тогда по теореме о циркуляции:

$$\frac{4\pi}{c} il = Bl \Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} i,$$

где l – длина стороны AB , i – ток в единице высоты катушки, которую можно заменить конкретной формулой:

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{NI}{l}, \quad (3.14)$$

где N – число витков, I – ток в катушке, l – высота катушки. Отметим, что эта формула лишь приближённо описывает поле реального соленоида.

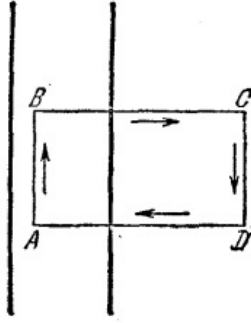


Рис. 3.12: Контур

3.3.3 Магнитное поле тороидальной катушки.

Рассмотрим тороидальную катушку (рис. 3.13). Силовые линии – это концентрические окружности с центрами на оси AA . Проведём одну такую окружность внутри тора (отмечена пунктиром). Циркуляция по нему равна $2\pi RB$; с другой стороны, круг с радиусом R пронизывает ток NI , где N – число витков. Тогда

$$B = \frac{2}{cR} NI.$$

Таким образом, магнитное поле тороидальной катушки совпадает с полем прямого тока силой NI .

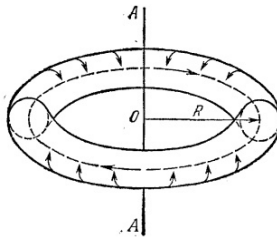


Рис. 3.13: Тороидальная катушка.

3.3.4 Дифференциальная форма теоремы о циркуляции.

Вспомним, что в векторном анализе понимают под ротором векторного поля $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ в декартовой системе $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$:

$$\text{rot } \mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим контур $ABCD$ (рис. 3.14), перпендикулярный оси Ox . Циркуляция

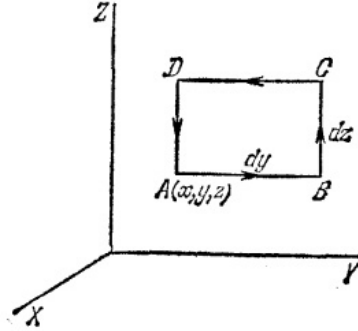


Рис. 3.14: К выводу дифференциальной теоремы о циркуляции.

по AB равна $B_y(x, y, z)dy$. Циркуляция по CD равна $-B_y(x, y, z + dz)dy$. Их сумма:

$$B_y(x, y, z)dy - B_y(x, y, z + dz)dy = -\frac{\partial B_y}{\partial z} dydz = -\frac{\partial B_y}{\partial z} dS.$$

Стороны BC, AD вносят вклад $\frac{\partial B_z}{\partial y} dS$. Тогда

$$\oint_{ABCD} B ds = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dS \Leftrightarrow \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dS = \frac{4\pi}{c} j_x dS.$$

Аналогичными рассуждениями получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} j_y, \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{4\pi}{c} j_z \\ \Rightarrow \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Значит, магнитное поле является вихревым там, где есть токи; является безвихревым там, где токов нет.

3.4 Магнитное поле в веществе.

3.4.1 Молекулярные токи.

До этого мы рассматривали магнитное поле в вакууме. В веществе внешнее магнитное поле испытывает влияние полей атомов и молекул: согласно теории Бора, в них вращаются электроны, которые к тому же имеют момент инерции, *спин*. Им обладают и атомные ядра. В современной физике такое представление заменено абстрактной картиной квантовой механики, но тем не менее, условно говоря, магнетизм вещества обусловлен 1) орбитальным движением электронов вокруг атомных ядер, 2) собственным спином электронов, 3) собственным спином атомных ядер.

Особенностью полей атомов вещества является то, что в обычном состоянии они ориентированны хаотически, потому компенсируют друг друга. Под воздействием внешнего поля атомы некоторых материалов ориентируются и компенсация нарушается. Тогда говорят, что тело *намагничено*. Тела, способные намагничиваться, называют *магнетиками*. Сильными магнитными свойствами обладают только *ферромагнетики*: железо, никель, кобальт, их сплавы и редкоземельные элементы. Например, сталь можно намагнитить, просто постукивая стержень, лежащий вдоль земного меридиана.

Орбитальные и спиновые вращения эквивалентны *молекулярным токам*, циркулирующим в атомах вещества. Для вычисления макроскопического поля эти токи можно сгладить и получить непрерывные *токи намагничивания*. Их плотность обозначим $\mathbf{j}_m$.

Таким образом, влияние среды на магнитное поле сводится к действующим токам намагничивания. В частности, макроскопическое поле $\mathbf{B}$ в веществе эквивалентно сумме из поля проводимости и поля намагничивания. Поэтому для него справедливы теоремы о потоке и циркуляции:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$
$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}(I + I_m) \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m).$$

Рассмотрим цилиндрический магнетик (рис. 3.15). Намагниченность среды принято характеризовать *вектором намагничивания* $\mathbf{J}$ – это средний магнитный момент единицы объёма магнетика, создаваемый молекулярными токами. Пусть n – концентрация молекул, $\mathbf{m}_0$ – средний магнитный момент одной молекулы. Тогда

$$\mathbf{J} = n\mathbf{m}_0. \quad (3.16)$$

Рассмотрим молекулярные токи. Их сила не равна нулю только на поверхности. Магнитный момент этого единого тока выражается по определению и как сумма

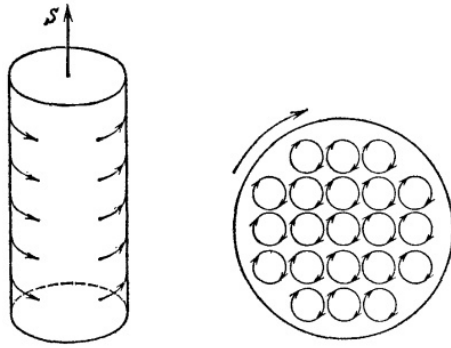


Рис. 3.15: Цилиндрический магнетик.

молекулярных моментов:

$$\mathbf{m} = \frac{I\mathbf{S}}{c}, \quad \mathbf{m} = V\mathbf{J} = SL\mathbf{J} \Rightarrow i_m = \frac{I}{L} = cJ,$$

где i_m – линейная плотность тока намагничивания. В случае цилиндра, ось которого отклоняется на угол α от нормали к основанию:

$$i_m = cJ \cos \alpha = cJ_l$$

То есть *линейная плотность тока намагничивания определяется осевой составляющей вектора намагничивания.*

3.4.2 Теорема о циркуляции магнитного поля в веществе.

Вектор $\mathbf{B}$ макроскопического магнитного поля в веществе называют *вектором индукции магнитного поля*. *Напряжённостью магнитного поля в веществе* называют

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}. \quad (3.17)$$

Для вектора напряжённости магнитного поля в веществе с током проводимости I верно

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.18)$$

► Рассмотрим произвольный контур L . Натянем на него поверхность S и окружим его объём V , схематически в виде тора (рис. 3.16). Поверхность S пересекают молекулярные токи I_m :

$$\begin{aligned} dI_m &= i_m dl = c(\mathbf{J} d\mathbf{l}) \\ \Rightarrow I_m &= \oint_L (\mathbf{J} d\mathbf{l}). \end{aligned}$$

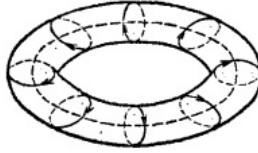


Рис. 3.16: К теореме о циркуляции магнитного поля в веществе.

Зная это, можем переписать теорему о циркуляции в вакууме. Пусть $\mathbf{B}$ – макроскопическое поле тока проводимости. Тогда

$$\oint (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J})d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}I$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{J})$$

$$\mathbf{j}_m = c \text{rot } \mathbf{J}.$$

□

Смысл введения вектора $\mathbf{H}$ в том, чтобы из уравнения пропали токи намагничивания. Он имеет ту же размерность, что и $\mathbf{B}$, но в случае $\mathbf{H}$ в гауссовой системе эту единицу называют *эрстедом*.

3.4.3 Граничные условия для векторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

Первое условие получить не сложно:

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (3.19)$$

Это верно в силу того, что формально антицидент совпадает с уравнением для $\mathbf{D}$ при условии отсутствия зарядов.

Если рассмотреть маленький контур $ABCD$ на границе двух сред, то по теореме о циркуляции получим

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}i_N$$

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}. \quad (3.20)$$

где i_N – линейная плотность тока I вдоль нормали к контуру. Если на границе он отсутствует, то $H_{1\tau} = H_{2\tau}$.

Эти условия открывают принципиальный способ измерить $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

В магнетике сделан бесконечно узкий канал, параллельный силовым линиям поля. Он должен быть тонким, чтобы удаление вещества не меняло поля в магнетике. В силу равенства тангенсальных компонент вектора

$\mathbf{H}$, если поместить в полость пробный виток и измерить $\mathbf{B}$, то он будет совпадает с $\mathbf{H}$ в окружающем магнетике.

В магнетике сделана щель, ограниченная бесконечно узкими плоскостями, перпендикулярными магнитному полю. В силу равенства нормальных компонент вектора $\mathbf{B}$, измеренное в полости значение совпадает со значением в окружающем магнетике.

3.4.4 Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость.

Ферромагнетики характеризуются весьма сложной зависимостью между $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}$, она нелинейная. Более того, для них наблюдается *гистерезис* – зависимость намагничивания от предшествующих состояний.

Только пара- и диамагнетики имеют зависимость $\mathbf{J} = \kappa_1 \mathbf{B}$. Но в силу исторических причин принято выражать $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{H}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J} \\ &= (1 + 4\pi\kappa)\mathbf{H} \\ &= \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\kappa.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Коэффициент κ называют *магнитной восприимчивостью*, а μ – *проницаемостью*. *Парамагнетиками* называют тела, для которых $\kappa > 0$. Они намагничиваются по внешнему полю. *Диамагнетики* характеризуются отрицательной восприимчивостью $\kappa < 0$, то есть они намагничиваются противоположно внешнему полю.

На границе раздела двух сред силовые линии поля магнетика должны преломляться:

$$\begin{aligned}\text{тангенсальные компоненты: } H_1 \sin \alpha_1 &= H_2 \sin \alpha_2, \\ \text{нормальные компоненты: } \mu_1 H_1 \cos \alpha_1 &= \mu_2 H_2 \cos \alpha_2 \\ \Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} &= \frac{\mu_1}{\mu_2}.\end{aligned}$$

Полученный закон преломления лежит в основе *магнитной защиты* внутренних тел от внешнего магнитного поля. Однако это не защищает внешние тела. Например, отклонение стрелки компаса в опыте Эрстеда никак не изменится, если провод поместить в железную оболочку. Полностью защищает внешние тела только оболочка из *сверхпроводника*.

3.5 Электромагнитная индукция.

3.5.1 Работа при перемещении витка с током в постоянном магнитном поле.

Рассмотрим провода AB, CD , подсоединённые к источнику тока (рис. 3.17). Между ними скользящий мостик длины l . Тогда элементарная работа магнит-

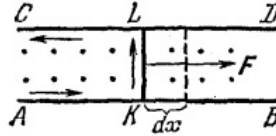


Рис. 3.17: Два провода со скользящим мостиком в магнитном поле.

ного поля по перемещению мостика равна

$$\delta A = \frac{I}{c} l B dx = \frac{I}{c} B dS = \frac{I}{c} d\Phi,$$

где Φ – магнитный поток. Значит, работа магнитного поля над током равна приращению магнитного потока, помноженному на I/c :

$$A_{12} = \frac{I}{c} (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Это соотношение верно и для случая, когда поле направленно произвольно по отношению к току.

3.5.2 Электромагнитная индукция.

Явление *электромагнитной индукции* было открыто Фарадеем в 1831 году. Простейший пример: возьмём катушку и замкнём её на гальванометре; при внесении в катушку намагниченного стержня гальванометр покажет наличие тока; при вынесении – наличие тока в обратном направлении. Этот ток называется *индукционным*. Он возникает из-за действия силы Лоренца на свободные заряды в проводнике:

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Рассмотрим ещё один пример (рис. 3.18). Провода AB, CD замкнуты слева и разомкнуты справа. Они соединены скользящим мостиком BC . Магнитное поле перпендикулярно рисунку и однородно. Пусть мостик BC движется вправо. Тогда сила Лоренца $\mathbf{F}$, создающая в нём ток, является внешней силой, создающей электрическое поле

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

с ЭДС индукции, равной

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \int \mathbf{E}_{\text{ind}} d\mathbf{l} = -\frac{v}{c}Bl = \{vl = dS/dt, BdS = d\Phi\} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.22)$$

где l – длина мостика. Знак минус возникает из-за того, что поле $\mathbf{E}_{\text{ind}}$ противоположно положительному обходу $d\mathbf{l}$.

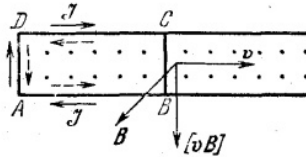


Рис. 3.18: Явление электромагнитной индукции.

Итак, ЭДС индукции пропорциональна скорости изменений магнитного потока, пронизывающего замкнутый контур. Это утверждение называют *основным законом э/м индукции*.

Для возбуждения индукционного тока существенно изменение магнитного потока, а не способ изменения. То есть индукционный ток можно вызвать следующими манипуляциями:

- изменение площади контура
- использование переменного магнитного поля
- перемещение контура
- перемещение магнита.

Главное чтобы менялся именно поток. Это подтверждено опытами.

3.5.3 Правило Ленца.

Заметим, что формула (3.22) определяет не только величину, но и направление индукционного тока. Возьмём замкнутый контур, ортогональный магнитному полю (рис. 3.19). Пусть магнитный поток возрастает ($d\Phi > 0$), тогда по формуле (3.22) ток будет направлен отрицательно (т.е. по часовой стрелке) и его магнитное поле будет противоположно внешнему. Пусть теперь магнитный поток убывает ($d\Phi < 0$), тогда ток направлен положительно и его магнитное поле сонаправлено с внешним.

Таким образом, *индукционный ток в замкнутом контуре противодействует причине, изменяющей магнитный поток через этот контур*. Это утверждение сформулировано Ленцем.

Пример. Возьмём горизонтальную катушку с сердечником, вдвое большим неё. Наденем на сердечник алюминиевое кольцо. Если подключить катушку к источнику тока, то она вызовет увеличение магнитного потока через контур алюминиевого кольца и в нём возникнет индукционный

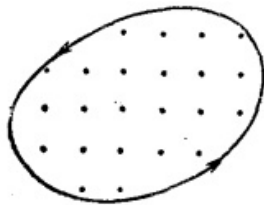


Рис. 3.19: Правило Ленца.

ток. По правилу Ленца он будет направлен так, что его магнитное поле будет противоположно полю катушки, из-за чего он оттолкнётся и даже может слететь со стержня. Если расположить стержень вертикально и подобрать нужную силу тока, то кольцо может долететь до потолка лекционной аудитории. Если вместо алюминия использовать медь (металл с большими плотностью и сопротивлением), то кольцо не отлетит, а будет сильно нагреваться. Всё это демонстрирует большую величину индукционного тока. □

В массивных проводниках могут возникать вихревые индукционные токи, которые называют *токами Фуко*. Пусть медный проводник в форме усечённого сектора подвешен на стержне так, что они образуют маятник, который может свободно колебаться между полюсами электромагнита (рис. 3.20). Тогда в медном секторе будут возникать индукционные токи, которые по правилу Ленца будут препятствовать движению маятника. Если электромагнит достаточно сильный, то маятник остановится при первом же колебании. Этот эффект пропадёт, если вместо сектора

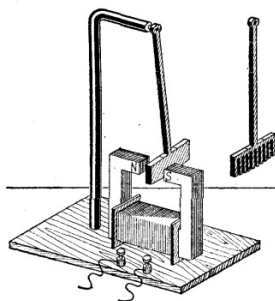


Рис. 3.20: Токи Фуко.

использовать гребень. Это применяют на практике, чтобы избежать потери энергии, уходящей на выделение джоулевого тепла.

Пример. Возьмём магнит в виде цилиндра и вертикальную медную трубу с диаметром, немного больше диаметра магнита. Тогда если отпустить магнит у верхнего горла трубы, его падение будет напоминать

движение в вязкой среде.

Если над магнитной стрелкой поместить горизонтальный диск и привести его во вращение, то стрелка придёт во вращение в том же направлении. $\square$

3.5.4 Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции.

Сила Лоренца является причиной индукционного тока в проводнике, движущемся в магнитном поле. Но какая сила возбуждает ток в случае, если неподвижный проводник находится в переменного магнитном поле. Ответ был дан Максвеллом: *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое*. А именно, Максвелл дал более глубокую формулировку закона электромагнитной индукции Фарадея: *всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле $\mathbf{E}$ такое, что для любого замкнутого контура s верно:*

$$\oint_s \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где s – произвольный замкнутый контур, который можно провести не только в проводнике.

Максвелл понимал сущность электромагнитной индукции как возникновение электрического поля, а Фарадей – электрического тока. Разница существенна, так как первая формулировка означает, что индукция может наблюдаться в отсутствие проводников, а возникновение тока есть лишь одно из проявлений поля. Но поле может ещё поляризовать диэлектрик, вызывать пробой конденсатора, ускорять заряженные частицы, и вызывать электрический ток в незамкнутых проводниках.

Пример. Возьмём две катушки и расположим их так, чтобы ось одной была продолжением оси второй. Первую катушку присоединим к звуковому генератору. Вторую – к пластинам осциллографа (рис. 3.21). Тогда осциллограф будет рисовать синусоиду. Это говорит о том, что между пластинами возникло переменное электрическое поле, а значит, в катушке, подключённой к ней, возникает ток, несмотря на то, что она является разомкнутым контуром. $\square$

Подставив формулу $\Phi = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$ и применив теорему Стокса, получим *дифференциальную форму закона электромагнитной индукции:*

$$\begin{aligned} \oint_s \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

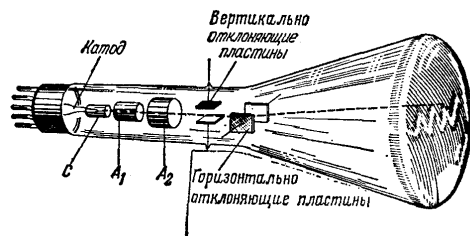


Рис. 12.40.

Рис. 3.21: Осциллограф.

Это уравнение входит в систему уравнений Максвелла. Его смысл в том, что индукционное электрическое поле *не потенциальное, а вихревое* (в отличие от электростатического поля), поэтому оно без каких-либо добавочных сил может вызвать непрерывный индукционный ток.

Во всех случаях индукционный ток вызывается полной силой Лоренца:

$$\mathbf{F} = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right].$$

Какая часть индукционного тока является электрической, а какая магнитной, зависит от выбора системы отсчёта. Пусть скорость заряженной частицы относительно двух ИСО связана формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Тогда (без доказательства)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]. \end{aligned}$$

3.5.5 Индуктивность проводов.

Пусть по тонкому витку течёт постоянный ток I . Пусть $\mathbf{B}$ – магнитное поле этого тока (рис. 3.22). Пусть s – произвольный контур внутри объёма провода. Опыты показывают, что поток поля пропорционален вектору $\mathbf{B}$, что можно записать как

$$\Phi = \frac{LI}{c}. \quad (3.23)$$

Коэффициент L называют *индуктивностью* провода или *коэффициентом самоиндукции провода*. Он зависит только от конфигурации провода и характеризует линейную зависимость магнитного потока Φ магнитного поля, созданного током I .

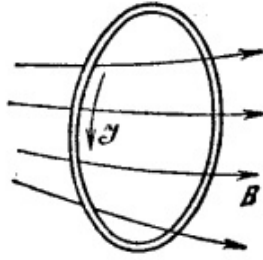


Рис. 3.22: Явление самоиндукции.

Заметим, что в этом определении существенно требование, что провод тонкий, так как это значительно невелирует дисперсию выбора контура s . Однако тонкий провод нельзя заменить бесконечно тонкой геометрической линией, потому что в силу $E \sim 1/r$ (r – расстояние до провода) мы бы получили $\Phi = \infty$.

Пример. Вычислим индуктивность соленоида, пренебрегая краевыми эффектами. Пусть l – его длина, N – число витков, S – площадь витка. Как мы знаем, индукция определяется формулой

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{IN\mu}{l}.$$

Тогда

$$\Phi = NBS = \frac{4\pi IN^2\mu S}{cl} \Rightarrow L = \frac{\Phi c}{I} = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}.$$

□

Единицей магнитного потока в системе СГСМ является *максвелл*, равный магнитному потоку, создаваемому полем в один гаусс через ортогональную к нему площадку в один квадратный сантиметр. По закону Био и Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{cr^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}],$$

поэтому коэффициент самоиндукции имеет размерность длины. Сантиметр есть индуктивность витка, в котором ток силой в одну СГСМ-единицу создаёт магнитный поток в один максвелл. Практической единицей магнитного потока является вебер, равный 10^8 максвеллов. Практической единицей индуктивности является генри, равный 10^9 сантиметров.

В практических единицах закон электромагнитной индукции и определение индуктивности можно записать так:

$$\mathcal{E}'_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi'}{dt},$$

$$\Phi' = L'I'.$$

Явлением *самоиндукции* называют возникновение ЭДС индукции при изменении силы тока, протекающего в контуре. Мы рассмотрим обе ситуации: при уменьшении тока и при увеличении.

3.5.6 Явления при замыкании постоянного тока.

Пусть в цепи есть источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$, катушка и сопротивление. Полная индуктивность цепи L , сопротивление R (рис. 3.23).

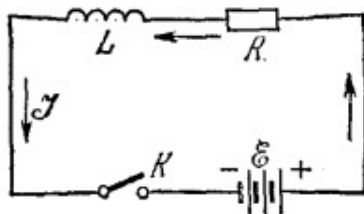


Рис. 3.23: Процесс нарастания тока при замыкании цепи.

При замыкании ключа ток не сразу достигает предельного значения $\mathcal{E}/R$, а нарастает постепенно. При этом из-за нарастания потока через контур цепи возникает индукционный ток, который назовём *экстратокком замыкания*.

Мы будем рассматривать такие токи, которые меняются во времени сравнительно медленно и которые в каждый момент времени токи в цепи можно считать одинаковыми, а магнитные поля могут вычисляться по закону Био и Савара, как если бы они были постоянными. Такие токи называют *квазистационарными*. Сила тока будет определяться выражением:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}'_{\text{ind}}}{R}; & I' &= \frac{\mathcal{E}' - \frac{d\Phi'}{dt}}{R'}, & \Phi' &= L'I' \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt}(L'I') + R'I' &= \mathcal{E}' \\
 L' \frac{dI'}{dt} + R'I' &= \mathcal{E}'; \\
 I' &= C \exp\left[-\frac{R'}{L'}\right] + \frac{\mathcal{E}'}{R'}; \\
 I &= \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}), & \tau &= \frac{L'}{R'} = \frac{L}{c^2 R}.
 \end{aligned}$$

Величину τ называют *временем установления тока*. Слагаемое $(\mathcal{E}/R)e^{-t/\tau}$ определяет силу экстратокка замыкания. Значит, за каждые τ секунд она уменьшается в e раз.

3.5.7 Явления при размыкании постоянного тока.

Пусть L – самоиндукция катушки, параллельно соединённой с сопротивлением R в цепь с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 3.24).

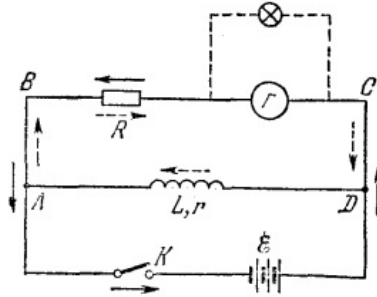


Рис. 3.24: Процесс убывания тока при размыкании цепи.

При размыкании цепи магнитный поток, пронизывающий контур $ABCD$, будет убывать, что вызовет ток индукции, направление которого показано пунктирными стрелками. Этот ток назовём *экстратокком размыкания*. Для контура $ABCD$ верно

$$\begin{aligned} L' \frac{dI'}{dt} + R' I' &= 0, \\ I' &= I'_0 e^{-t/\tau}; \\ \mathcal{E}'_{\text{ind}} &= -L' \frac{dI'}{dt} = \frac{L' I'_0}{\tau e^{-t/\tau}} = \frac{R'}{r'} \mathcal{E}' e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

При $R' \gg r'$ ЭДС индукции сильно превосходит ЭДС батареи, из-за чего может случиться электрический пробой в цепи, содержащей большую индуктивность.

Пример. Подключим к рассмотренной цепи лампочку (рис. 3.24). Тогда при установившемся токе она горит тускло. А при размыкании она ярко вспыхивает и даже может перегореть. (не очень понимаю. по-моему из-за катушки L ток в параллельной ветке убывает ещё сильнее, так как ток индукции и убывающий ток направлены противоположно). $\square$

3.5.8 Взаимная индукция.

Пусть два витка со стационарными токами I_1, I_2 расположены друг над другом, как в катушке. Тогда магнитные потоки через них выражаются как

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Коэффициенты L_{ik} тоже называют коэффициентами индуктивности. Они зависят только от конфигурации витков, но не от токов. Заметим:

$$\begin{aligned} I_2 = 0 &\Rightarrow \Phi_1 = \frac{L_{11}I_1}{c}, \\ I_1 = 0 &\Rightarrow \Phi_2 = \frac{L_{22}I_2}{c}. \end{aligned}$$

То есть L_{11} , L_{22} – собственные индуктивности первого и второго витков. Коэффициенты L_{12} , L_{21} называют *взаимными индуктивностями* или *коэффициентами взаимной индукции*. Полученные соотношения легко расширить на случай не двух, а n витков.

Явление взаимной индукции применяется для повышения и понижения напряжения переменного тока в трансформаторах.

3.6 Магнитная энергия.

3.6.1 Энергия тока.

Рассмотрим цепь с индуктивностью L , сопротивлением R . Включим ЭДС $\mathcal{E}_0$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= RI - \mathcal{E}_s \\ \mathcal{E}_0 I dt &= RI^2 dt - \mathcal{E}_s I dt \\ \delta A_{\text{ext}} &= \delta Q + \frac{1}{c} I d\Phi. \end{aligned}$$

Видим, что работа внешней ЭДС частично уходит в изменение магнитного потока $d\Phi = LdI/c$:

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{extra}} &= \frac{1}{c^2} ILdI \\ A_{\text{extra}} &= \frac{LI^2}{2c^2}. \end{aligned}$$

Приходим к выводу, что при отсутствии ферромагнетиков контур с индуктивностью L и током I обладает *собственной энергией тока*:

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (3.25)$$

3.6.2 Энергия магнитного поля.

Энергия магнитного поля при отсутствии ферромагнетиков выражается как

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \mathbf{H} dV. \quad (3.26)$$

Подынтегральное выражение означает, что в объёме dV локализована энергия

$$w = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \mathbf{H}.$$

3.6.3 Собственная и взаимная энергия.

Магнитная энергия системы контуров с токами вычисляется по формуле

$$W_m = \frac{1}{2c^2} \sum \sum L_{ik} I_i I_k. \quad (3.27)$$

Электрический ток обладает запасом *магнитной энергии*, количество которой зависит только от величины и распределения токов, а также от магнитных свойств среды, заполняющей пространство. В расчётах мы будем считать провода идеальными.

Пусть в одиночном неподвижном витке сила тока растёт от нуля до I . В силу явления электромагнитной индукции внешний источник тока будет совершать элементарную работу против ЭДС индукции, равную

$$\delta A_{\text{ext}} = -\mathcal{E}_{\text{ind}} I dt = \left\{ \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \right\} = \frac{I}{c} d\Phi.$$

Если среда не обладает гистерезисом, то работа δA_{ext} пойдёт на увеличение магнитной энергии:

$$dW_m = \frac{I}{c} d\Phi.$$

Если вблизи витка отсутствуют ферромагнетики, то L витка остаётся постоянной и $\Phi = LI/c$. Следовательно:

$$W_m = \int_0^I dW_m = \frac{I}{2c} \Phi = \{\Phi = LI/c\} = \frac{L}{2} \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \{I = c\Phi/L\} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Энергия зависит только от состояния системы, но не от способа его достижения. Заметим, что полученную формулу можно применять для вычисления L в случае, когда провод толстый. Обобщим формулу на случай нескольких витков:

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{ext}} &= \frac{1}{c} \sum_i I_i d\Phi_i, \\ W_m &= \frac{1}{c} \int \sum I'_i d\Phi'_i, \\ &= \frac{1}{c} \sum I_i \Phi_i \int_0^1 \lambda d\lambda, \\ &= \frac{1}{c} \sum I_i \Phi_i = \frac{1}{2c^2} \sum \sum L_{ik} I_i I_k. \end{aligned}$$

Полученный интеграл не зависит от способа увеличения тока в разных витках, поэтому при подсчёте, мы приняли, что все токи в каждый момент времени пропорциональны конечному току: $I'_i = \lambda I_i$.

(Ещё мы предположили, что в процессе намагничивания проницаемость μ оставалась постоянной, только в этом случае связь между токами и потоками является линейной. В ином случае для верности формул нужно поддерживать постоянную температуру. Тогда энергия W_m будет иметь смысл работы, совершаемой над системой при изотермическом и квазистатистическом нарастании тока. Такую работу называют *свободной энергией*, так что полученные формулы определяют не внутреннюю, а свободную магнитную энергию системы.)

Теорема (взаимности). *Для описанной системы матрица L симметрична:*

$$\forall i, k : L_{ik} = L_{ki}.$$

► Пусть ток течёт только по виткам 1 и 2. Тогда чтобы изменить эти токи нужно совершить работу

$$\begin{aligned} \delta A_{\text{ext}} &= \frac{1}{c}(I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2), \\ dW_m &= \frac{1}{2c}d(I_1\Phi_1 + I_2\Phi_2) = \frac{1}{2c}(I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2) + \frac{1}{2c}(\Phi_1 dI_1 + \Phi_2 dI_2) \\ &\Rightarrow I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = \Phi_1 dI_1 + \Phi_2 dI_2 \\ &\quad \{\text{пусть } I_2 = \text{const}\} \\ \Phi_1 &= \frac{1}{c}(L_{11}I_1 + L_{12}I_2), \quad \Phi_2 = \frac{1}{c}(L_{11}I_1 + L_{22}I_2) \\ &\Rightarrow d\Phi_1 = \frac{1}{c}L_{11}dI_1, \quad d\Phi_2 = \frac{1}{c}L_{21}dI_1 \\ &\quad \{\text{подставим последние две строчки в 3 строчку}\} \\ L_{11}I_1 dI_1 + L_{21}I_2 dI_1 &= (L_{11}I_1 + L_{12}I_2)dI_1 \Rightarrow L_{21} = L_{12}. \end{aligned}$$

□

3.7 Теорема о сохранении магнитного потока.

Пусть виток с током движется в магнитном поле (постоянном или переменном – неважно). Пусть при этом он произвольно деформируется. Тогда в витке возбуждается ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Допустим, виток является идеальным проводником, т.е. $R = 0$. Тогда $\mathcal{E}_{\text{ind}} = 0$, так бесконечные токи физически невозможны. Значит, $\Phi = \text{const}$, или *при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле магнитный поток, пронизывающий контур провода, остаётся постоянным*. Это утверждение называют *теоремой о сохранении магнитного потока*. Это не означает, что $I = 0$. Наоборот, это означает, что индукционный ток по правилу Ленца полностью компенсирует изменение магнитного потока.

Выделим в идеально проводящей жидкости замкнутый контур, движущийся вместе с частицами самой жидкости. Тогда поток через него тоже будет постоянным. Это подобно тому, что магнитные силовые линии *вморожены в вещество*. Такое представление широко применяется при рассмотрении, например, плазмы, поскольку она обладает высокой электропроводностью.

3.8 Ферромагнетизм.

Во-первых, ферромагнетики склонны к *спонтанной намагниченности*, т.е. они могут быть намагничены уже в отсутствие магнитного поля.

Во-вторых, ферромагнетики характеризуются сложной зависимостью между намагниченностью $\mathbf{J}$ и вектором $\mathbf{H}$ и между вектором $\mathbf{B}$ и вектором $\mathbf{H}$ (рис. 3.25).

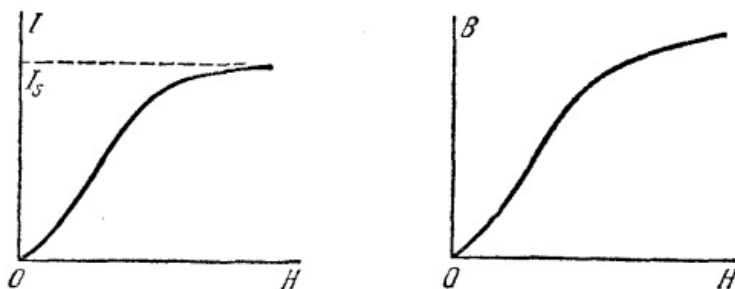


Рис. 3.25: Насыщение намагниченности $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s$ и особая связь $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

В-третьих, имеет место *магнитный гистерезис* (рис. 3.26).

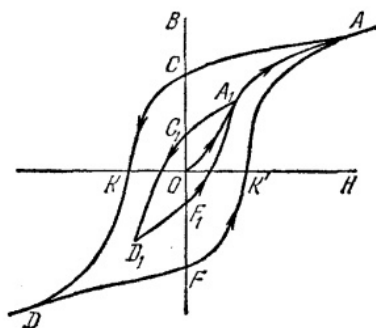


Рис. 3.26: Магнитный гистерезис

Глава 4

Уравнения Максвелла.

4.1 Ток смещения.

Уравнения Максвелла – это основные уравнения электромагнитного поля в неподвижных средах, применимые и к постоянным, и к переменным э/м полям. К ним можно прийти путём последовательного обобщения опытных фактов. Мы отбросим все ранее полученные соотношения, в основе которых лежит непосредственное взаимодействие на расстоянии: закон Кулона, закон Био и Савара и пр. А сохраним мы те уравнения, которые можно представить в дифференциальной форме.

Например, к основным уравнениям можно отнести закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

В случае стационарного поля $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Однако теорема о циркуляции магнитного поля, представляемая в дифференциальной форме, не может входить в число основных:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{L} = \frac{4\pi}{c} I,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Дело в том, что если взять дивергенцию от обеих частей, то $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ для абсолютно любого поля $\mathbf{H}$. Поэтому должно быть $\mathbf{j} = 0$. То есть теорема о циркуляции верна только для стационарных токов.

Таким образом, мы должны обобщить это уравнение так, чтобы в правой части стоял вектор с нулевой дивергенцией, в стационарном случае переходящий в вектор $\mathbf{j}$. Найти такой вектор легко. Воспользуемся

теоремой Гаусса для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\rho &= 0, & \left| \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, & \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} \right\} \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) &= 0, & \mathbf{j}_{\text{shift}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{j}_{\text{shift}} + \mathbf{j}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Величину $\mathbf{j}_{\text{shift}}$ Максвелл назвал *плотностью тока смещения*, а сумму $\mathbf{j}_{\text{shift}} + \mathbf{j}$ — *полным током*.

Таким образом, Максвелл пришёл к такому уравнению:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{shift}}).$$

Настоящим доказательством этого уравнения могут служить только опыты.

Пример. Опишем случай, который тоже приводит к противоречию между теоремой о циркуляции магнитного поля и законом сохранения заряда. Пусть в неограниченную однородную среду помещён металлический шар с полным объёмным зарядом Q (рис. 4.1). Пусть среда проводящая. Тогда появятся радиальные токи с плотностью $\mathbf{j}$. Возникает вопрос: какое направление будет иметь магнитное поле, создаваемое этим током?

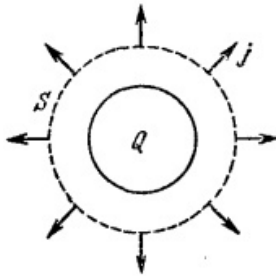


Рис. 4.1: Пример необходимости тока смещения.

Пусть вектор $\mathbf{B}$ имеет радиальную составляющую. Проведём вокруг шара сферу S (см. рисунок). Тогда в силу симметрии конфигурации радиальная составляющая вектора $\mathbf{B}$ одна и та же во всех точках поверхности S . В этом случае магнитный поток через S не равен нулю, что противоречит теореме о магнитном потоке.

Пусть вектор $\mathbf{B}$ перпендикулярен радиусу. Тогда в силу симметрии все направления в точке на радиусе равноправны (ничем не выделены). Значит, единственная возможность — это $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ всюду. Следовательно, $\mathbf{j} = 0$ — получили противоречие закону сохранения заряда.

Чтобы устранить возникшее противоречие, допустим, что кроме токов проводимости I есть другие, которые их компенсируют. Пусть это ток I_{shift} такой, что $I_{\text{shift}} + I = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_{\text{shift}} = \frac{dQ}{dt}; \\ D &= \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = r^2 \frac{\partial D}{\partial t}; \\ \mathbf{j}_{\text{shift}} &= \frac{dQ}{dt dS} = \frac{r^2}{S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

□

Итак, током смещения называют величину, определяемую формулой (4.1). Согласно этой формуле, *токи смещения возникают там, где меняется электрическое поле*. А значит, *переменное электрическое поле порождает магнитное поле*. Это утверждение обратно закону э/м индукции Фарадея.

Рассмотрим слагаемые тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{shift}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}.$$

Величину $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \dot{\mathbf{P}}$ называют *плотностью тока поляризации*:

$$\mathbf{P} = \sum q_i \mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{j}_{\text{pol}} = \sum q_i \mathbf{v}_i.$$

Она обусловлена движением связанных зарядов. Кажется необычным, но нечто по-настоящему новое содержится во втором слагаемом. Оно означает, что *даже в вакууме изменение электрического поля возбуждает магнитное поле*. Это открытие – наиболее существенный шаг Максвелла на пути построения своей электродинамики.

4.2 Система уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла – это основные уравнения электромагнитного поля в неподвижных средах, применимые и к постоянным, и к переменным э/м полям. Они являются *аксиомами* электродинамики:

$$\begin{aligned}
\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\
\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= 4\pi \int \rho dV, & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\
\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Эти уравнения утверждают, что *источником электрического поля может быть либо электрический заряд, либо переменное магнитное поле; источником магнитного поля может быть либо электрический ток, либо переменное электрическое поле.*

Уравнения не симметричны относительно электричества и магнетизма, потому что экспериментально не удалось обнаружить *монополи*, магнитные заряды.

Дифференциальные уравнения Максвелла предполагают, что э/м величины непрерывны в пространстве и времени. Интегральные же допускают существование *поверхностей разрыва*, в которых величины меняются скачкообразно. Чтобы достигнуть математической эквивалентности дифф. и инт. форм, к первым нужно добавить *граничные условия*, которые мы вывели ранее:

$$\begin{aligned}
D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\sigma, & [\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \\
E_{1t} &= E_{2t}, & B_{1n} &= B_{2n}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Когда поля стационарны, то система уравнений разбивается на две независимые группы:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\
\text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0.
\end{aligned}$$

То есть *стационарные электрическое и магнитное поля независимы.*

4.2.1 Материальные уравнения.

Восемь уравнений из предыдущего пункта не составляют полную систему электродинамики, поскольку в них участвует шестнадцать неизвестных: пятнадцать координатных компонент векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ и одна скалярная

величина ρ . Необходимо дополнить эти уравнения такими соотношениями, которые характеризуют не только векторы, но и индивидуальные свойства среды. Такие соотношения называют *материальными уравнениями*.

Принципиальный способ получения материальных уравнений дают молекулярные теории поляризации, намагничивания и электропроводности среды, в основе которых лежат идеализированные модели среды. Мы с такими встречались:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{j} &= \lambda \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Электронная теория показала, что приведённые материальные уравнения верны, если

- за время периодов внутримолекулярных колебаний ε/μ поле меняется мало,
- на межмолекулярных расстояниях ε/μ поле меняется мало.

4.3 Скорость распространения электромагнитных возмущений.

4.3.1 Возникновение электромагнитного поля.

Рассмотрим большую однородную среду из диэлектрика (рис. 4.2). Поместим в неё бесконечную заряженную плоскость, которую обозначим за XOY . Проведём ось Z так, чтобы оси XYZ образовывали правую тройку. Пусть плоскость движется вдоль оси X , причём неравномерно. Это движение порождает магнитное поле, силовые линии которого параллельны оси Y .

Это магнитное поле меняет магнитный поток через контуры $OCPQ$, $NOQR$, значит, возникнет переменное электрическое поле. Оно будет направлено параллельно X , т.к. оно не может быть параллельно Y (в силу симметрии) или параллельно Z (в силу не понятных мне причин).

Переменное электрическое поле порождает ток смещения. Он, в свою очередь, порождает магнитное поле. Магнитное поле направлено по праву Ленца, т.е. препятствует изменению магнитного потока.

Если остановить движение плоскости, то ток смещения исчезнет, однако возбуждённое электромагнитное поле останется и всякое изменение магнитного поля будет возбуждать электрическое поле и наоборот. Более того, по разные стороны от заряженной плоскости электромагнитные поля будут расположены симметрично. Ниже будет показано, что они будут распространяться.

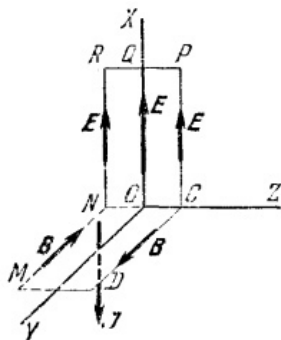


Рис. 4.2: Иллюстрация.

4.3.2 Распространение электромагнитного поля. Плоская волна.

Пусть электромагнитное поле в рассматриваемый момент времени представлено кривыми I и II (рис. 4.3).

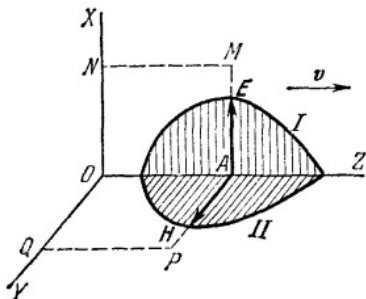


Рис. 4.3: Электромагнитная волна.

Введём предположение, которое оправдается последующими расчётами, что это поле без изменения формы перемещается вправо вдоль Z с какой-то скоростью v .

Для контуров $OAMN$, $OQPA$ запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\oint_{OAMN} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t},$$

$$\oint_{OQPA} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial t}.$$

Тогда если $|AM| = |AP| = 1$, то

$$E = E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t},$$

$$H = H_y = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial t}.$$

Вследствие движения потоки изменятся:

$$\begin{aligned} d\Phi_m = -vBdt, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = -vB, \quad E = \frac{v}{c}B, \quad E = \frac{v}{c}\mu H, \\ d\Phi_{el} = -vDdt \Rightarrow \frac{\partial \Phi_{el}}{\partial t} = -vD \Rightarrow H = \frac{v}{c}D \Rightarrow H = \frac{v}{c}\varepsilon E, \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \end{aligned}$$

Получили, что гипотеза о движении электромагнитного поля не имеет противоречий. Если бы возмущение покоилось, то мы бы получили $v = 0$. Если бы была верна теория непосредственного взаимодействия, то $v = \infty$.

Рассмотренный пример прост в теоретическом отношении. На самом деле, для возбуждения э/м волн существенно только наличие ускоренно движущихся электрических зарядов. Например, на радиостанциях волны возбуждаются быстропеременными электрическими токами в антеннах; такие волны не будут плоскими, их можно считать таковыми только на больших расстояниях. Однако именно на примере плоских волн выявляются все наиболее важные особенности э/м волн.

Полученные формулы можно записать векторно:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{vD}].$$

Эти формулы описывают *плоское возмущение*.

4.3.3 Следствия.

Из полученных формул следует

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2.$$

Это означает, что в бегущей плоской э/м волне в любой момент времени электрическая энергия равна магнитной.

Таким свойством, к слову, обладают все возмущения, подчиняющиеся принципу суперпозиции.

Полученная формула скорости возмущения означает, что в вакууме, где $\varepsilon = \mu = 1$, э/м волна распространяется со скоростью c , равной электродинамической постоянной. Опыты Вебера и Кольрауша по её измерению показали, что она равна скорости света в вакууме. Это обстоятельство навело Максвелла на мысль, что свет имеет э/м природу. Герц в своих опытах показал, что э/м волны распространяются, отражаются, преломляются, огибают препятствия, интерферируют, и показал, что уравнения Максвелла правильно описывают их свойства. С этого момента теория Максвелла получила всеобщее признание.

Уравнения Максвелла в непроводящих средах обладают симметрией относительно времени и направления действия. То есть если поменять знаки у B, t или E, t , то получим тождественные соотношения.

4.4 Энергия и поток энергии.

Ранее мы определили элементарную внешнюю работу при изменении э/м поля или при протекании тока в единице объёма:

$$\delta A_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}) + \mathbf{j} \mathbf{E} dt.$$

Эта работа идет на приращение внутренней энергии u единицы объёма. Тогда в силу уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}) + \mathbf{j} \mathbf{E} \\ &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Вспоминая тождество из векторного анализа: $\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}[\mathbf{EH}]$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (4.5)$$

В дифференциальной форме это уравнение означает, что [любая] энергия в пространстве течёт подобно жидкости. В интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = - \oint \mathbf{S} d\mathbf{F} \quad (4.6)$$

уравнение значит, что приращение внутренней энергии в объёме происходит за счёт «втекания» э/м энергии через поверхность S .

Общее представление о потоке энергии было введено Умовым в 1874 году. Применил эту идею к э/м явлениям Пойнтинг в 1885. Поэтому вектор $\mathbf{S}$ называют *вектором Умова–Пойнтинга*. Полученный закон сохранения называют *теоремой Умова–Пойнтинга*.

Пусть нет гистерезиса. Тогда работа δA_{ext} пойдёт только на приращение джоулева тепла и э/м энергии. Значит, объёмной плотностью э/м энергии будет

$$dw = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}),$$

$$w = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}).$$

В среде с параметрами ε, μ получим

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2). \quad (4.7)$$

У плоской волны электрическая энергия равна магнитной, значит,

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varepsilon}{4\pi} E^2 \\ &= \frac{\mu}{4\pi} H^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\varepsilon\mu} EH \\ &= \frac{c}{4\pi v} EH, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S = vw = \frac{c}{4\pi} EH. \quad (4.8)$$

Пример. Рассмотрим провод с постоянным током I (рис. 4.4). Магнит-

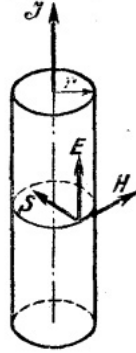


Рис. 4.4: Провод с током.

ное поле у поверхности равно $H = 2I/(cr) = 2j\pi r/c$ и направлено по касательной. Электрическое поле $\mathbf{E}$ параллельно оси провода. Тогда поток энергии $\mathbf{S}$ направлен внутрь провода. Количество э/м энергии еже-секундно будет равно

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div } \mathbf{S} = jE.$$

Эта энергия совпадает с мощностью джоулева тепла. Значит, *э/м энергия из окружающего пространства «втекает» внутрь провода и вся превращается в джоулево тепло.* $\square$

Пусть w – плотность э/м энергии. Поскольку каждая энергия эквивалентна массе, то w/c^2 – плотность массы э/м энергии. Если энергия движется со скоростью $\mathbf{v}$, то с ней связано количество движения

$$\mathbf{g}_{el} = \frac{w\mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = 4\pi c[\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

4.5 Векторный потенциал.

4.5.1 Определение и «обоснование».

Уравнения Максвелла образуют систему взаимосвязанных уравнений первого порядка в частных производных, определяющих изменение э/м поля. Для простых конфигураций они могут быть решены непосредственно. Однако часто удобно ввести потенциалы и свести систему к меньшему числу уравнений второго порядка.

Векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$ называют вектор $\mathbf{A}$ такой, что

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

В купе с законом э/м индукции получаем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{D} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \\ \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

То есть векторный потенциал определяет электрическое поле с точностью до градиента произвольной скалярной функции φ .

Подобно тому, как электростатический потенциал связан с понятием энергии, векторный потенциал обнаруживает тесную связь с понятием импульса. Если заряженная частица находится вблизи источника магнитного поля, которое в определённый момент времени быстро отключают, то она приобретает дополнительный импульс $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{A}$ даже в том случае, если $\mathbf{B}$ в точке нахождения частицы было равно нулю (например, с внешней стороны соленоида). В частности, если частица до отключения поля покоилась, то она начинает движение с импульсом, равным $q\mathbf{A}$. Таким образом, мы получаем возможность непосредственно измерить векторный потенциал в макроскопической системе.

Поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, введённые с помощью потенциалов φ , $\mathbf{A}$ автоматически удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

потому что дивергенция ротора и ротор градиента всегда равны нулю. При этом если подставить их в оставшиеся два уравнения Максвелла, получим

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.12)$$

Как было сказано, векторный потенциал определён с точностью до градиента произвольной функции. В связи с этим возникает необходимость *калибровки*. Уравнения (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) вместе с выбранной калибровкой составляют систему, эквивалентную системе уравнений Максвелла.

4.5.2 Кулоновская калибровка.

Для рассмотрения статических магнитных полей со стационарными токами удобно использовать *кулоновскую калибровку*:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (4.13)$$

Тогда скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, а векторный – неоднородному волновому уравнению

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= -4\pi\rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.\end{aligned} \quad (4.14)$$

4.5.3 Калибровка Лоренца.

Для нестационарных задач используют *калибровку Лоренца*:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

Для векторного потенциала в такой форме верны уравнения

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho.\end{aligned} \quad (4.16)$$

Глава 5

Колебания и волны.

5.1 Уравнение колебательного контура.

В физике под *колебанием* в общем смысле понимают всякий периодический или приблизительно периодический процесс, в котором значения той или иной физической величины повторяются точно или приблизительно через равные или приблизительно равные промежутки времени.

Колебательным контуром называют систему из последовательно соединённых конденсатора C , катушки L и сопротивления R . Внешняя ЭДС создаёт переменное напряжение $\mathcal{E}$ между концами цепи 1,2 (рис. 5.1). Стрелками обозначим положительное направление тока.

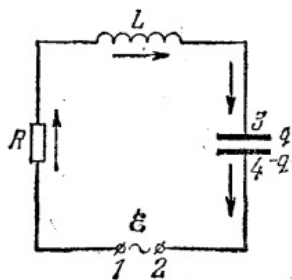


Рис. 5.1: Колебательный контур

При рассмотрении электрических колебаний удобнее использовать практи-

ческие единицы. Пусть ток квазистационарный. Тогда

$$\begin{aligned}\int E_l dl &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ RI + \frac{q}{C} - \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ \frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} &= \mathcal{E}, \quad \Phi = L \frac{dq}{dt} \\ L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= \mathcal{E}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Это соотношение называют *уравнением колебательного контура*.

Вспомним уравнение затухающего колебания груза на пружине:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \dot{x} + kx = F.$$

В отсутствие внешней ЭДС и сопротивления R будут протекать незатухающие колебания (рис. 5.2).

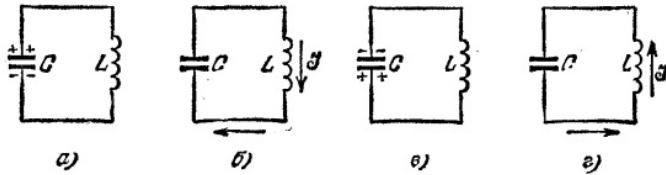


Рис. 5.2: Незатухающие колебания в колебательном контуре.

Если отсутствует внешняя ЭДС, то колебания называют *свободными*. Системы, свободные колебания которых описываются линейными уравнениями, называют *линейными*. Введём обозначения и перепишем уравнение контура:

$$w_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}, \quad X = \frac{\mathcal{E}}{c} \Rightarrow \ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + w_0^2 q = X.\tag{5.2}$$

Величину w_0 называют *собственной частотой* системы, а γ — коэффициентом затухания.

5.1.1 Свободные колебания гармонического осциллятора.

В отсутствие сопротивления свободные колебания описываются уравнением

$$\ddot{q} + w_0^2 q = 0.\tag{5.3}$$

Такую систему называют *гармоническим осциллятором*. При наличии силы затухания $2\gamma\dot{q}$ — г. о. с затуханием.

Умножим уравнение (5.3) на $\dot{q}$, тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{q}^2 + w_0^2 q^2) &= 0, \\ \dot{q}^2 + w_0^2 q^2 &= \text{const}, \\ \frac{1}{2}LI^2 + \frac{q^2}{2C} &= \text{const}.\end{aligned}$$

Получили закон сохранения энергии.

Для электрических колебаний собственная частота определяется формулой

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (5.4)$$

которую называют *формулой Вильяма Томсона*.

Решив уравнение (5.3) получим следующее:

$$\begin{aligned}q &= q_0 \cos(w_0 t + \delta), \\ I = \dot{q} &= -w_0 q_0 \sin(w_0 t + \delta), \\ W_{el} = \frac{q^2}{2C} &= \frac{q_0^2}{4C} (1 + \cos [2w_0 t + \delta]), \\ W_m = \frac{1}{2}LI^2 &= \frac{q_0^2}{4C} (1 - \cos [2w_0 t + \delta]).\end{aligned} \quad (5.5)$$

Заметим, что средние значения энергии равны, а полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\begin{aligned}\overline{W}_{el} = \overline{W}_m &= \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{4}LI_0^2, \\ W = W_{el} + W_m &= \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}LI_0^2.\end{aligned} \quad (5.6)$$

5.1.2 Условие квазистационарности.

Напомним, что ток называют квазистационарным, если мгновенные значения I в неразветвлённых участках цепи можно считать одинаковыми. В динамических процессах такое достигается в случае, если величины (заряд, энергия и как следствие ток) меняются медленно, из-за чего электродинамические взаимодействия можно считать мгновенными, порядка c .

Пусть l – длина провода, соединяющего обкладки конденсатора (фактически, длина провода в катушке самоиндукции). Пусть T_0 – период переменного тока. Э/м возмущение проходит весь провод за время $\tau = l/c$. Тогда квазистационарность означает

$$\begin{aligned}\tau &\ll T_0 \\ l &\ll cT_0 = \lambda,\end{aligned} \quad (5.7)$$

где λ – длина волны в вакууме.

5.1.3 Затухающие колебания.

В отсутствие внешней ЭДС получим уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + w_0^2 q = 0.$$

Его решение зависит от дискриминанта $D = 4\gamma^2 - 4w_0^2$.

Затухание.

В случае $D < 0$ решение имеет вид:

$$q = ae^{-\gamma t} \cos(wt + \delta). \quad (5.8)$$

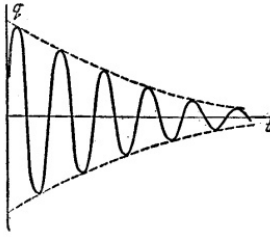


Рис. 5.3: Затухающие колебания.

Тогда периодичен не модуль q , а его знак. Период прохождения q между максимумом и минимумом равен

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{w_0^2}}} > T_0.$$

Видим, что силы затухания понижают частоту колебаний. Функцию $A(t) = ae^{-\gamma t}$ называют *амплитудой*, а время $\tau = 1/\gamma$ — *временем затухания*. С ними связаны следующие характеристики затухания:

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T}, \quad (5.9)$$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\gamma T}, \quad (5.10)$$

$$d = \gamma T = \frac{1}{d}, \quad (5.11)$$

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d}. \quad (5.12)$$

Логарифм отношения двух последовательных максимумов и минимумов амплитуд (см. график) называют *логарифмическим декрементом колебания* (обозначили d); эта величина является *мерой затухания амплитуды*. Число Q называют *добротностью колебания*; это величина, обратно пропорциональная декременту.

Апериодический процесс.

В случае $D = 0$ получаем

$$q = (a + bt)e^{-\gamma t}.$$

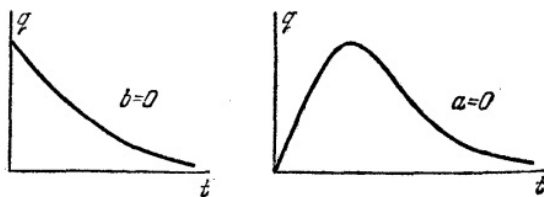


Рис. 5.4: Апериодический процесс.

Такой процесс не является колебательным, поэтому его называют *апериодическим*.

Ещё один апериодический процесс получится при $D > 0$:

$$q = C_1 e^{-at} + C_2 e^{-bt}, \quad a, b > 0$$

5.2 Вынужденные колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы.

5.2.1 Общее решение.

Вынужденные затухающие колебания описываются так:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + w_0^2 q = X(t).$$

Пусть $X(t) = X_0 \cos wt$. Тогда частным решением будет

$$q = \frac{X_0}{w_0^2 - w^2 + 2iw\gamma} e^{iwt}.$$

Общее решение выглядит следующим образом:

$$q = \frac{X_0}{w_0^2 - w^2 + 2iw\gamma} e^{iwt} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos w_0 t + C_2 \sin w_0 t). \quad (5.13)$$

Оно имеет такой смысл: при $t \gg \tau$ свободные колебания затухнут и останутся только вынужденные.

5.2.2 Формулы амплитуды и фазы.

Пусть $w_0^2 - w^2 + 2iw\gamma = \rho e^{i\delta}$. Выделим в общем решении (5.13) вещественную часть и получим

$$q_{\text{уст}} = a(w) \cos(wt - \delta),$$

$$a(w) = \frac{X_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4w^2\gamma^2}}, \quad \delta = \arctan \frac{2w\gamma}{w_0^2 - w^2}. \quad (5.14)$$

Амплитуда достигает максимума в точке $w = \sqrt{w_0^2 - 2\gamma^2}$:

$$a_{\text{max}} = a(w_0) = \frac{X_0}{2w_0\gamma} = \frac{w_0}{2\gamma} a(0)$$

$$\Rightarrow \frac{a_{\text{max}}}{a(0)} = \{w_0 = 2\pi/T\} = \frac{\pi}{d} = Q.$$

5.2.3 Резонансная кривая. Радио как пример резонанса токов и напряжения.

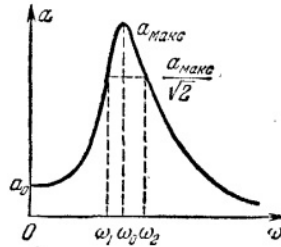


Рис. 5.5: Резонансная кривая.

Одной из характеристик резонансной кривой является её *ширина* Δw – разница частот w_1, w_2 , при которых полная энергия колебаний вдвое меньше максимальной. Вспомним, что энергия зависит от квадрата амплитуды. В максимуме $w = w_0$. Тогда нам нужны такие w_1, w_2 , что

$$(w_1^2 - w_0^2)^2 = 4w_1^2\gamma^2, \quad (w_2^2 - w_0^2)^2 = 4w_2^2\gamma^2.$$

Приближённо получим

$$\Delta w = 2\gamma = w_0/Q = w_0 \frac{a_0}{a_{\text{max}}}. \quad (5.15)$$

Получили, что чем больше добротность осциллятора, тем уже резонансная кривая. Также чем больше максимум резонансной кривой, тем он острее.

Из полученных фактов можем увидеть пользу резонанса. Например, настройка *радиоприёмника* на нужную частоту – это поиск частоты w такой, что колебательный контур приёмника вступает в резонанс с частотой радиостанции. Причём чем добротнее контур приёмника, тем он чувствительнее. А чем выше чувствительность приёмника, тем уже диапазон частот, которые он может воспринимать.

5.3 Вынужденные колебания под действием гармонической силы.

Согласно теореме Фурье любую функцию с основной частотой w можно представить как функциональный ряд из функций с кратными частотами $w_k = w + 2\pi k/T$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i w_k t}, \\ f(t) e^{-i w_m t} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i (w_k - w_m) t}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i w_m t} dt &= c_m. \end{aligned}$$

Как мы знаем, функция $X(t)$ не обязана быть периодической, чтобы разложиться в ряд Фурье. Пусть

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t) \cos wt, \quad A(t) = A_0(q + \alpha \cos \Omega t), \\ X(t) &= A_0 \cos wt + \frac{\alpha A_0}{2} [\cos(w + \Omega)t + \cos(w - \Omega)t]. \end{aligned}$$

Про колебание $X(t)$ говорят, что оно *модулировано по амплитуде*. Величину w называют *несущей частотой*. Указанную модуляцию $A(t)$ называют *синусоидальной*. Постоянную α называют *глубиной модуляции*, а Ω – *частотой модуляции*. Если частоты $w - \Omega, w, w + \Omega$ соизмеримы, то сила X периодична.

Пример. Установим два камертона на резонансных ящиках (рис. 5.6). Если возбудить один камертон, то начинает звучать другой. Если же на ножку одного камертона надеть груз, то этого не произойдёт. Пусть теперь между дуплами резонансных ящиков вращается диск с нецентральной дыркой. Меняя частоту вращения диска можно вернуть резонанс. Это и есть модулирование амплитуды. $\square$

Модулированное колебание часто называют *синусоидальным колебанием с переменной амплитудой*. Дело в том, что не остронастроенный приёмник с синусоидальной модуляцией будет воспринимать не

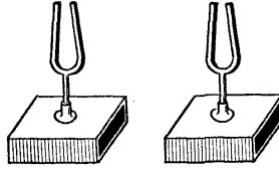


Рис. 5.6: Резонанс.

только свою частоту w , но и частоты $w - \Omega, w + \Omega$, причём с примерно одинаковым усилием. Из-за этого колебания в приёмнике – это сумма трёх синусоид, которые в первом приближении можно заменить на одну синусоиду $X(t) = A(t) \cos(wt)$ с медленно меняющейся амплитудой $A(t)$.

Аналогичная ситуация при *частотной модуляции*. Приёмник с малым временем установления $\tau = 1/\gamma$ будет воспринимать несколько волн, которые можно заменить на одну синусоиду $X(t) = A_0 \cos(w(t)t)$ с медленно меняющейся частотой $w(t)$.

В случае неперiodической силы $X(t)$ сумма Фурье заменяется интегралом Фурье.

5.4 Метод комплексных амплитуд.

Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединённых R, L, C . К клеммам участка цепи подключена сила

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_0 \cos(wt + \varphi), \\ I &= I_0 e^{i(wt + \psi)}.\end{aligned}$$

Будем писать $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i(wt + \varphi)}$, подразумевая $\mathcal{E} = \operatorname{Re} \mathcal{E}_0 e^{i(wt + \varphi)}$. Далее, чтобы не смешать действительную и мнимую части экспоненты, будем использовать только три операции: умножение на действительное число, сложение, интегрирование и дифференцирование по действительной переменной. *Комплексными амплитудами* назовём

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}, \\ \tilde{I} &= I_0 e^{i\psi}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Поскольку ток переменный, то отношение $\mathcal{E}/I$ зависит от фазы тока. *Импедансом* цепи с переменным током назовём константу

$$Z = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{\tilde{I}}.\tag{5.17}$$

Часть $\operatorname{Re} Z$ называют *активным сопротивлением*, а $\operatorname{Im} Z$ – *реактивным*.

5.4.1 Пример 1.

Рассмотрим контур на рис. 5.7. По правилу Кирхгофа:

$$U_C + U_R + U_L = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Вычислим падение напряжения на элементах:

$$U_R = IR,$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{\tilde{I}}{C} \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega C} I,$$

$$U_L = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I.$$

Импедансы $Z = U/I$ равны

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L.$$

Тогда можем найти I_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \frac{\mathcal{E}_0}{Z_R + Z_C + Z_L}, \\ I_0 = |\tilde{I}| &= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{L}\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}, \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}. \end{aligned}$$

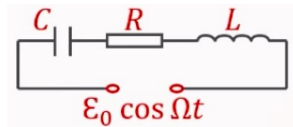


Рис. 5.7: Прямой колебательный контур.

5.4.2 Пример 2.

Рассмотрим контур на рисунке 5.8. Сам контур состоит из двух плечей A, B :

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_B = i\omega L + r_L, \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}, \\ \Rightarrow Z &= \frac{r_L + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i r_L \omega C}. \end{aligned}$$

Пусть $w_0^2 = 1/(LC)$, $2\gamma = r_L/L$. Тогда импеданс контура в резонансе ($w = w_0$) равен

$$Z_{res} = \frac{L}{Cr_L} \left[1 - i \frac{r_L}{w_0 L} \right].$$

Введём величину ρ :

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = wL = \frac{1}{wC}.$$

Тогда при $r_L \ll \rho$ контур будет иметь высокую добротность:

$$Q = \frac{w_0}{2\gamma} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{r_L} = \frac{\rho}{r_L},$$

а импеданс резонанса будет равен

$$Z_{res} \approx \frac{L}{Cr_L} = \frac{\rho^2}{r_L} = \rho Q$$

Выразим общий ток I и токи в плечах контура:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}}{Z_{res}} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{Q\rho} \cos wt, \\ I_A &= \frac{\mathcal{E}}{Z_A} \approx \frac{\mathcal{E}_0 \cos wt}{-i\rho} = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} \cos(wt + \pi/2), \\ I_B &= \frac{\mathcal{E}}{Z_B} \approx \frac{\mathcal{E}_0 \cos wt}{i\rho} = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} \cos(wt - \pi/2). \end{aligned}$$

Получили, что ток в неразветвлённой части цепи очень мал, а в колебательном контуре высок. В плече A фаза тока опережает источник, а в плече B – отстаёт от него.

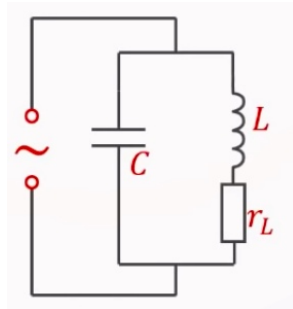


Рис. 5.8: Параллельный колебательный контур.

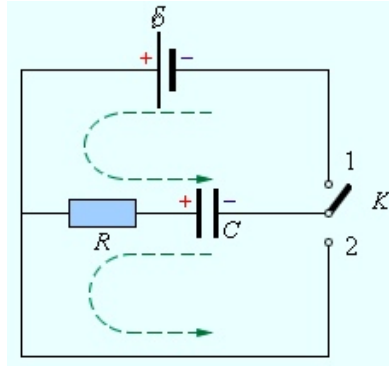


Рис. 5.9: Цепь зарядки и разрядки конденсатора через резистор.

5.4.3 RC-цепь.

Пусть в цепь последовательно включены сопротивление R , ёмкость C (рис. 5.9). Если замкнуть ключ в положение 1, то начнётся процесс зарядки конденсатора через резистор. Допустим, что этот процесс квазистационарный. Тогда $I = dq/dt = C dU/dt$, причём $I(0) = 0$ – ток в цепи в момент замыкания. По правилу Кирхгофа

$$\begin{aligned} RI + U &= \mathcal{E} \\ CR \frac{dU}{dt} + U &= \mathcal{E} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$U(t) = \mathcal{E} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right]. \quad (5.19)$$

Величину $\tau = RC$ называют *постоянной времени цепи*. Полученное решение означает, что при $t \rightarrow \infty$ будет $U \rightarrow \mathcal{E}$. Процесс аperiодический.

Рассмотрим процесс разрядки, т.е. перевод ключа обратно в положение 2. Тогда в уравнении (5.18) будет $\mathcal{E} = 0$ и $U(0) = \mathcal{E}$. Отсюда получим

$$U(t) = \mathcal{E} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right). \quad (5.20)$$

Это означает, что за каждые τ секунд напряжение уменьшается в e раз.

5.4.4 RL-цепь.

Пусть в цепь последовательно включены сопротивление R , индуктивность L (рис. 5.10). При замыкании ключа ток начнет течь по сопротивлению и индуктивности, поэтому начнётся процесс установления тока. Пусть процесс ква-

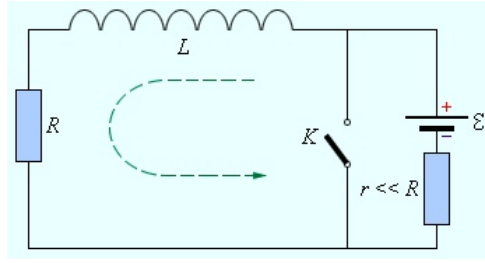


Рис. 5.10: Цепь с индуктивностью и сопротивлением.

зистационарный, тогда $I(0) = 0$. Воспользуемся правилом Кирхгофа:

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \quad (5.21)$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (5.22)$$

Величину $\tau = L/R$ называют *постоянной времени цепи*. Полученное решение означает, что при $t \rightarrow \infty$ будет $I \rightarrow \mathcal{E}/R$. То есть процесс аperiодический.

Для описания разрядки в уравнении (5.21) примем $\mathcal{E} = 0$ и $I(0) = \mathcal{E}/R$ и получим.

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.23)$$

Это означает, что за каждые τ секунд ток уменьшается в e раз.

5.5 Эффективные напряжение и ток.

Сдвиг фаз между током и напряжением влияет на работу и мощность переменного тока.

$$\delta A = \mathcal{E} dq, \quad P = \mathcal{E} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} I.$$

В случае синусоидальных токов

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos wt, \quad I = I_0 \cos(wt - \delta)$$

получим

$$P = \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \delta}_{\bar{P}} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos(2wt - \delta).$$

Величина $\overline{P}$ является *средней мощностью переменного тока*. Эффективными значениями напряжения и тока называют

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}^2 dt,$$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt.$$

В случае синусоидальных токов имеем

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\sqrt{2}}, \quad I_{\text{eff}}^2 = \frac{I_0^2}{\sqrt{2}}. \quad (5.24)$$

Тогда средняя мощность равна

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \delta. \quad (5.25)$$

5.6 Плоские электромагнитные волны.

Пусть имеется неограниченная однородная среда, в которой *без поглощения* (т.е. $jE = \lambda E^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, т.е. среда диэлектрическая) рассматривается э/м возмущение. Пусть нет объёмных зарядов. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть все величины зависят только от x, t . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Из последней строчки следует, что D_x, B_x – статические поля, не влияющие на распространение э/м возмущения. Значит, ставшиеся две строки составляют две независимые системы уравнений. Рассмотрим первую. Пусть $E \equiv E_y$, $H \equiv H_z$. Пусть $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, & \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} &= -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}. \end{aligned}$$

Пусть $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Получили, что E и H удовлетворяют волновому уравнению:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Можем получить то же самое в векторной форме:

$$\begin{aligned}E &= f(x - vt), \quad H = g(x - vt), \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -vf', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = g' \\ \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \right\} \\ &\Rightarrow g' = \frac{\varepsilon v}{c} f' \\ &\Rightarrow g = \frac{\varepsilon v}{c} f \Leftrightarrow H = \frac{v}{c} D.\end{aligned}$$

Аналогично поступаем со вторым уравнением и получаем:

$$\begin{aligned}H &= \frac{v}{c} D, \quad E = \frac{v}{c}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c} [\mathbf{vD}], \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{vB}].\end{aligned}\tag{5.27}$$

Вид функций f, g в плоской бегущей волне зависит от начальных условий. Особое значение имеют синусоидальные, или *монохроматические волны*:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos w \left(t - \frac{x}{v} \right), & \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \cos w \left(t - \frac{x}{v} \right); \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos (wt - kx), & \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \cos (wt - kx).\end{aligned}$$

Число $k = w/v$ называют *волновым*. *Длиной волны* называют пространственный период поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{w} = \frac{v}{\nu}.$$

Плоское возмущение ещё называют *бегущей волной*. Ввиду линейности и однородности системы Максвелла сумма плоских возмущений является плоским возмущением.

Фронтом плоской волны является плоскость. Видим, что во всех точках фронта э/м поле плоского возмущения одинаково (рис. 4.3).

Волновым вектором называют вектор, направление которого перпендикулярно фазовому фронту бегущей волны, а абсолютное значение равно волновому числу. Волновой вектор является градиентом фазы волны:

$$\mathbf{k} = \text{grad } \varphi(t).\tag{5.28}$$

Если электрический и магнитный векторы во всех точках пространства лежат в одной плоскости, волну называют *линейно поляризованной*.

Стоячей электромагнитной волной будет

$$E_x = 2E_0 \cos kx \cos \omega t, \quad H_y = 2H_0 \sin kx \sin \omega t.$$

Пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного и наоборот. Вектор Пойнтинга обращается в нуль в узлах и пучностях, поэтому движение э/м энергии ограничено колебаниями между узлами.

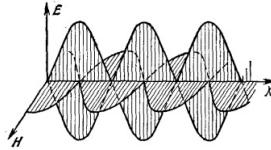


Рис. 5.11: Стоячая э/м волна.

5.7 Поле излучения диполя Герца.

Вектор плотности потока электромагнитной энергии равен

$$\mathbf{S} = \frac{\sin^2 \vartheta}{4\pi\epsilon v^3 r^3} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{v} \right) \mathbf{N}.$$

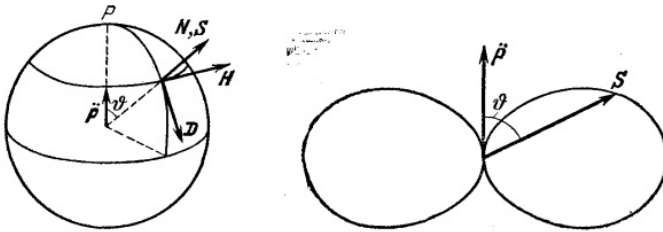


Рис. 5.12: Поле излучения переменного диполя на больших расстояниях. Справа диаграмма направленности.

5.8 Скин-эффект.

Рассмотрим неограниченную металлическую плоскость. Пусть ток смещения мал. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{j} &= -\frac{\lambda}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Пусть $j \equiv j_x$, $B \equiv B_x$. Тогда имеем две независимые системы уравнений. рассмотрим одну из них:

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\lambda}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad j = -\underbrace{\frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}}_D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda}{c} B \right].$$

Получили первый закон диффузии, где D – коэффициент диффузии. Значит, проникновение э/м поля в проводник подобно диффузии.

За время τ диффузия продвигается на глубину $l \sim \sqrt{D\tau}$. Пусть по плоской поверхности металла начинает течь переменный ток. За половину периода он пройдёт

$$l \sim \sqrt{DT/2} \sim c \sqrt{\frac{T}{8\pi\mu\lambda}} \sim \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\lambda\nu}}. \quad (5.29)$$

Затем ток изменит направление, поэтому глубже l не проникнет. Таким образом, *плотность тока в металле убывает с глубиной*. Можем сказать, что *глубина l проникновения тока в металл убывает с частотой*. При больших ν ток течет практически только по поверхности. Это явление получило название *скин-эффект*.

Рассмотрим цилиндрический провод с током (рис. 5.13) и контур $MM'N'N$. При изменении силы тока I в этом контуре возникнет индукционный ток, который будет ослаблять изменение на отрезке MM' и усиливает на $N'N$. В результате этого амплитуда установившихся колебаний тока на $N'N$ будет больше, чем на оси MM' .

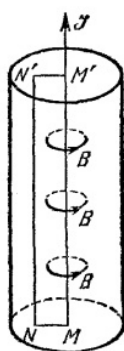


Рис. 5.13: Качественное объяснение скин-эффекта.